



TUGAS AKHIR - SM141501

**DESAIN DAN SIMULASI SISTEM KENDALI *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN* (LQG) UNTUK KESTABILAN GERAK *PITCH* LSU-05**

SHAFFIANI NURUL FAJAR  
NRP. 1212 100 059

Dosen Pembimbing :  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Soleha, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016





FINAL PROJECT - SM141501

***DESIGN AND SIMULATION LINEAR QUADRATIC  
GAUSSIAN (LQG) CONTROL SYSTEM FOR PITCH  
MOTION STABILITY OF LSU-05***

SHAFFIANI NURUL FAJAR  
NRP. 1212 100 059

Supervisors :  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Soleha, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2016



## LEMBAR PENGESAHAN

**DESAIN DAN SIMULASI SISTEM KENDALI *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)* UNTUK KESTABILAN GERAK *PITCH* LSU-05**

***DESIGN AND SIMULATION LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG) CONTROL SYSTEM FOR PITCH MOTION STABILITY OF LSU-05***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :  
**SHAFFIANI NURUL FAJAR**  
NRP. 1212 100 059

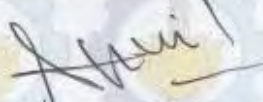
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Soleha, S.Si, M.Si  
NIP. 19830107 200604 2 001

Dosen Pembimbing I,



Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA ITS



Dr. Imang Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003



# **DESAIN DAN SIMULASI SISTEM KENDALI *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN* (LQG) UNTUK KESTABILAN GERAK *PITCH* LSU-05**

**Nama Mahasiswa** : Shaffiani Nurul Fajar  
**NRP** : 1212 100 059  
**Jurusan** : Matematika FMIPA – ITS  
**Pembimbing** : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Soleha S.Si, M.Si

## **Abstrak**

*Lapan Surveillance UAV* (LSU)-05 merupakan salah satu jenis *Unmanned Aerial Vehicle* (UAV) yang dikembangkan oleh LAPAN sejak tahun 2013. LSU-05 memiliki empat jenis kendali permukaan, salah satunya adalah *elevator* yang berfungsi mengendalikan gerak sudut *pitch*. Agar sudut *pitch* pada UAV stabil dan mengikuti *setpoint*, maka dibutuhkan perancangan sistem kendali. Langkah pertama adalah mengkaji penurunan persamaan model gerak longitudinal pesawat. Langkah kedua adalah melakukan perancangan kendali LQG. Kendali LQG dipilih karena mampu memperbaiki keluaran sistem dari gangguan yang bersifat stokastik. Selain itu, juga ditambahkan kendali integral agar keluaran sudut *pitch* sesuai dengan input yang dimasukkan. Setelah kendali LQG dan kendali integral diterapkan, maka dilakukan pengamatan hasil simulasi untuk mendapatkan respon keluaran sistem. Dari hasil pengamatan, diperoleh waktu stabil sudut *pitch* adalah 0,435 s, yang berarti ketika LSU-05 melakukan gerak *pitch* sebesar 0,2 rad, maka untuk mencapai 0,2 rad dibutuhkan waktu sebesar 0,435 s. Selain itu diperoleh nilai *overshoot* sebesar 10% yang berarti saat nilai masukan sudut *pitch* sebesar 0,2 rad, LSU-05 melakukan gerak *pitch* sebesar 0,22 rad.

**Kata Kunci** : *LSU-05, gerak longitudinal, sudut pitch, LQG*





**DESIGN AND SIMULATION LINEAR QUADRATIC  
GAUSSIAN (LQG) CONTROL SYSTEM FOR PITCH  
MOTION STABILITY OF LSU-05**

**Student's Name** : Shaffiani Nurul Fajar  
**NRP** : 1212 100 059  
**Department** : Matematika FMIPA – ITS  
**Supervisors** : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Soleha S.Si, M.Si

***Abstract***

*Lapan Surveillance UAV (LSU)-05 is an unmanned aircraft developed by LAPAN since 2013. LSU-05 consists of four kinds of control surface, and one of them is the elevator which is used to control pitch angular motion. To make the pitch angular motion stable and followed the setpoint, a control system design that can be applied to LSU-05 mathematical model of longitudinal motion is required. The first step is reviewing the mathematical model's equation of longitudinal motion. The second step is designing LQG control system. LQG control system was selected in this study to avoid stochastic disturbance from the system outcome. Integral control was also added so that pitch angle match the setpoint value. After LQG control system and integral control was applied, simulation results were observed to see the system response. The results showed that the time required to stabilize the pitch angle was 0.435 s, which means LSU-05 needs 0.435 s to make 0.2 rad pitch motion. Furthermore, overshoot value was obtained to be 10%, which means when input value of pitch is 0.2 rad, the actual pitch motion of LSU-05 is 0.22 rad.*

***Keyword : LSU-05, Longitudinal Motion, Pitch Angle, LQG***



## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh,*

*Alhamdulillahirabbil'alamin*, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat, petunjuk, hidayah dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul :

### **“DESAIN DAN SIMULASI SISTEM KENDALI *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)* UNTUK KESTABILAN GERAK *PITCH* LSU-05”**

sebagai salah satu persyaratan untuk menempuh kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya.

Tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada :

1. Kedua orang tua tercinta atas segala doa nya, kepercayaannya, ketabahannya, motivasi nya dan segala-gala nya yang selalu diberikan kepada penulis.
2. Almarhumah Emak Sumarni dan Bapak Mat atas kesabaran dalam mendidik dan membesarkan penulis.
3. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. dan Bu Soleha S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasi yang diberikan kepada penulis dalam proses pelaksanaan Tugas Akhir sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

4. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT , Bapak Drs. Kamiran, M.Si dan Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan untuk perbaikan Tugas Akhir ini.
5. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si. MT. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA – ITS.
6. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku ketua prodi sekaligus koordinator Tugas Akhir dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku sekretaris prodi yang telah mengatur jalannya proses pelaksanaan Tugas Akhir.
7. Ibu Dra. Titik Mudjiati, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik dan motivasi selama penulis menempuh pendidikan di jurusan Matematika ITS.
8. Bapak dan Ibu dosen serta para staff di Jurusan Matematika FMIPA ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
9. Bapak Ir. Eko Budi Purwanto, M.T. selaku pembimbing kerja praktek di Pustekbang LAPAN dan Mas Heri yang telah memberikan pengetahuan terkait topik Tugas Akhir ini.
10. Adik adik (Ipul, Bilda, Mpok Yani, Fajar, Adin), keluarga Batu (Mbak Sri, Mbak Wati dan lain lain) serta para sepupu (Anna, Yusuf, Alfi, Ferdi dan lain lain) yang hadir menghibur di tengah tengah kegelisahan Tugas Akhir.
11. Beastudi Etos Surabaya yang telah memberikan beasiswa dan kesempatan untuk tinggal di asrama yang penuh dengan kebaikan dunia akhirat.
12. Supervisor Beastudi Etos Surabaya (Pak Budi Pangestu) yang telah banyak membimbing penulis dalam persiapan karir. Pendamping asrama Mbak Immash, Mbak Wihda,

- Mbak Marsha dan pendamping RdV Mas Sony Junianto serta seluruh pendamping beastudi etos Surabaya
13. *Rayon de Vie* (Anis, Qomqom, Youshi, Pandu, Aris, Rizal dan Galih) atas segala persahabatan, kekonyolan, kekeluargaan dan kebaikan kalian.
  14. Ulfha, Hana, Mbak Tyas dan Mbak Ngatini atas motivasi dan kesetian nya dalam mengingatkan penyelesaian Tugas Akhir.
  15. Zufar, Resi, Adit, Mbak Iffah, Yunita, Chibi, Ela, Ninggar, Asmi, Suep dan seluruh teman teman Matematika ITS angkatan 2012 yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
  16. Teman teman kos Gebang Wetan (Ustadzah, Nur, Ainun, Sila, Iska, Ifta, Izzah, Ninid, Andini, Sari, Rika, Tita dkk) yang telah menemani penulis selama 1 tahun dengan penuh ketegangan dan keceriaan.
  17. Teman teman kerja praktek, peneliti serta karyawan di Pustekbang LAPAN Indonesia.
  18. Teman teman Ibnu Muqlah, Kabinet Pelita, Pelita Sainstek HIMATIKA ITS, Trainer Accelerator, Asisten WTKI, Asisten Kalkulus, Klub Keilmiah, Teknokrat Muda ITS dan *Extension* yang telah memberikan persahabatan serta pelajaran dalam banyak hal.
  19. Pak Tertib Utomo atas referensi referensi ilmiah yang telah diberikan kepada penulis serta Bapak Ibu karyawan perpustakaan ITS atas keramahan melayani penulis saat meminjam buku.
  20. Seluruh pihak yang tak mampu penulis sebutkan satu per satu.

Apabila dalam penyusunan Tugas Akhir ini terdapat kekurangan, maka penulis mengharapkan kritik dan saran

yang bersifat membangun demi penyempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak. Amin.

*Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.*

Surabaya, Juli 2016

Penulis

## DAFTAR ISI

Abstrak .....	i
<i>Abstract</i> .....	iii
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
DAFTAR TABEL .....	xv
DAFTAR SIMBOL .....	xvii
BAB I PENDAHULUAN .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
1.1 Latar Belakang .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
1.2 Rumusan Masalah .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
1.3 Batasan Masalah.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
1.4 Tujuan.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
1.5 Manfaat.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
1.6 Sistematika Penulisan...	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.1 LSU-05 .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.2 Sistem Sumbu Pesawat.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.3 Kestabilan.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.4 Keterkontrolan dan Keteramatan....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.5 Kendali LQG .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>

2.6	Kendali LQG dengan Aksi Integral	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.8	Hubungan Aljabar Riccati dengan Gain Kalman Filter .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.9	Hubungan Aljabar Riccati dengan Gain Regulator .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.10	Deret Taylor .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
BAB III METODE PENELITIAN .....		<b>Error! Bookmark not defined.</b>
ANALISA DAN PEMBAHASAN .....		<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.1	Penurunan Persamaan Gerak Pesawat	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.1.1	Transformasi Sumbu Koordinat Pesawat .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.1.2	Transformasi Persamaan Kecepatan Sudut ..	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.1.3	Gerak Translasi....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.1.4	Gerak Rotasi .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.2	Linearisasi .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.3	Persamaan Keadaan Gerak Longitudinal .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.4	Uji Kestabilan, Keterkontrolan dan Keteramatan Sistem .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.4.1	Uji Kestabilan.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.4.2	Uji Keterkontrolan.	<b>Error! Bookmark not defined.</b>



4.4.3 Uji Keteramatan ....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.5 Perancangan Kendali LQG.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.5.1 Estimator Kalman Filter .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.5.2 Gain Regulator .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.5.3 Gain Integrator .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.6 Simulasi dengan Simulink MATLAB	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.6.1 Representasi Diagram Blok Sistem Awal .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.6.2 Representasi Diagram Blok Sistem Awal dengan Estimator Kalman Filter .	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.6.3 Representasi Sistem dengan Gain $K_c$ .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.6.4 Representasi Sistem dengan Gain $K_i$ .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.6.5 Representasi Uji <i>Tracking</i> Pada Sistem .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
BAB V ENUTUP .....	19
5.1 Kesimpulan.....	19
5.2 Saran.....	20
DAFTAR PUSTAKA.....	21
LAMPIRAN 1 .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
LAMPIRAN 2 .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
LAMPIRAN 3 .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>





## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 LSU-05 .....	5
Gambar 2.2 Sumbu Badan Pesawat .....	9
Gambar 2.3 (a) Gerak <i>rolling</i> (b) Gerak <i>pitching</i> (c) Gerak <i>yawing</i> .....	10
Gambar 2.4 LQG dengan Aksi Integral .....	16
Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian.....	23
Gambar 4.1 Transformasi Terhadap Sumbu z.....	25
Gambar 4.2 Transformasi Terhadap Sumbu y .....	26
Gambar 4.3 Transformasi Terhadap Sumbu x .....	27
Gambar 4.4 Diagram Blok Simulink Sistem Awal .....	60
Gambar 4.5 Representasi Simulink matriks A .....	60
Gambar 4.6 Representasi Simulink matriks B .....	60
Gambar 4.7 Representasi Simulink untuk Gangguan Berdistribusi Normal.....	61
Gambar 4.8 Hasil Keluaran $\theta$ pada Sistem Awal.....	62
Gambar 4.9 Diagram Blok Simulink Sistem dengan Estimator Kalman Filter .....	63
Gambar 4.10 Representasi Simulink untuk <i>Noise</i> Berdistribusi Normal .....	63
Gambar 4.11 Representasi Simulink untuk Gain $K_f$ .....	64
Gambar 4.12 Hasil Keluaran $\theta$ pada Sistem dengan Estimator Kalman Filter .....	64
Gambar 4.13 Error Kalman Filter .....	65
Gambar 4.14 Diagram Blok Simulink <b>LQG</b> .....	66
Gambar 4.15 Representasi Simulink untuk Gain $K_c$ .....	66
Gambar 4.16 Hasil Keluaran $\theta$ pada Sistem dengan Kendali LQG .....	67
Gambar 4.17 Diagram Blok Simulink Kendali LQG dengan Gain Integrator $K_i$ .....	68

Gambar 4.18 Representasi Simulink untuk Gain $K_i$ .....	68
Gambar 4.19 Hasil Keluaran $\theta$ dengan Kendali LQG dan Gain Integrator.....	69
Gambar 4.20 <i>Setpoint</i> untuk Uji <i>Tracking</i> .....	71
Gambar 4.21 Hasil Simulasi Uji <i>Tracking</i> Sudut <i>Pitch</i> .....	71

## **DAFTAR TABEL**

Tabel 2.1 Spesifikasi LSU-05 .....	7
Tabel 2.2 Komponen Gerak Pesawat .....	8
Tabel 2.3 Karakteristik Respon Sistem .....	70



## DAFTAR SIMBOL

$P$	Kecepatan sudut pada sumbu $x$
$Q$	Kecepatan sudut pada sumbu $y$
$R$	Kecepatan sudut pada sumbu $z$
$X$	Gaya pada sumbu $x$
$Y$	Gaya pada sumbu $y$
$Z$	Gaya pada sumbu $z$
$L$	Momen <i>rolling</i>
$M$	Momen <i>pitching</i>
$N$	Momen <i>yawing</i>
$\varphi$	sudut <i>roll</i>
$\theta$	sudut <i>pitch</i>
$\psi$	sudut <i>yaw</i>
$\alpha$	sudut serang
$\delta_e$	defleksi <i>elevator</i>
$\delta_T$	defleksi <i>throttle</i>
$u$	Kecepatan searah sumbu $x$
$v$	Kecepatan searah sumbu $y$
$w$	Kecepatan searah sumbu $z$
$u_c$	Vektor kontrol
$\xi$	Vektor gangguan ( <i>disturbance</i> )
$n$	Vektor <i>noise</i>
$x$	Variabel sistem
$\hat{x}$	Variabel estimasi sistem
$A$	Matriks keadaan
$B$	Matriks masukan
$G$	Matriks gangguan
$C$	Matriks keluaran
$Q_f$	Kovarians gangguan
$R_f$	Kovarians <i>noise</i>
$P_f$	Solusi Aljabar Riccati pada gain Kalman filter
$K_f$	Gain Kalman filter
$Q_c$	Matriks semidefinit positif
$R_c$	Matriks definit positif



$K_c$	Gain Regulator
$K_i$	Gain Integrator
$J_f$	Performansi <i>error</i> filter
$J$	Performansi indeks
$e$	<i>error</i> variabel keadaan dan variabel estimasi
$r$	referensi <i>setpoint</i>
$\varepsilon$	<i>error</i> referensi dan variabel estimasi yang diamati
$\lambda$	nilai eigen
$M_{c1}$	Matriks keterkontrolan untuk defleksi <i>elevator</i>
$M_{c2}$	Matriks keterkontrolan untuk defleksi <i>throttle</i>
$M_{o\theta}$	Matriks keteramatan untuk variabel sudut <i>pitch</i>
$T_{F',1}$	Matriks transformasi pada sumbu z
$T_{F',1}$	Matriks transformasi pada sumbu z

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Teknologi dirgantara di Indonesia telah mengalami beberapa perkembangan, salah satunya adalah teknologi pesawat tanpa awak atau lebih dikenal dengan *Unmanned Aerial Vehicle* (UAV). UAV telah dikembangkan oleh beberapa instansi antara lain : Lembaga Antariksa dan Penerbangan (LAPAN), BPPT, Globalindo *Technology Service* Indonesia, Uavindo, Aviator dan Robo Aero Indonesia.[1] LAPAN telah mengembangkan pesawat tanpa awak generasi kelima yaitu LAPAN *Survailance* UAV (LSU)-05 yang telah dirilis sejak tahun 2013. Misi LSU-05 adalah untuk kegiatan penelitian, observasi, pengawasan perbatasan wilayah dan investigasi bencana alam.

Secara umum, UAV membutuhkan sebuah sistem kendali mandiri yang saling terhubung dan terintegrasi untuk menjaga kestabilan saat terbang di udara. Sistem kendali mandiri yang dibutuhkan adalah sistem untuk mengatur posisi, *attitude* (sikap terbang) serta navigasi dari UAV tersebut. Kestabilan posisi adalah kestabilan untuk mengetahui dan mengidentifikasi pusat massa pesawat. Kestabilan navigasi adalah kestabilan pesawat untuk mengikuti rute (*waypoint*) yang telah ditentukan. Kestabilan sikap terbang adalah kestabilan untuk melakukan gerak pada pesawat, yaitu untuk menjaga kestabilan gerak *rolling*, *pitching* dan *yawing*.

Dalam tugas akhir ini, dilakukan perancangan sistem kendali sikap terbang untuk gerak *pitch*. Sistem kendali yang dirancang bermanfaat agar input sudut kendali elevator yang dimasukkan sama dengan keluaran sudut *pitch* yang dilakukan oleh LSU-05. Kesalahan atau ketidaksesuaian input sudut elevator dan keluaran sudut *pitch* dapat mempengaruhi keseimbangan pesawat.

Gerakan *pitching* merupakan gerakan pesawat untuk mendongak ke atas (*pitch up*) atau mengangguk ke bawah (*pitch down*). Gerak *pitch* dilakukan oleh pesawat untuk menuju atau melalui ketinggian tertentu. Saat terbang di udara, lintasan yang dilalui pesawat tidak hanya garis lurus. Akan tetapi, terdapat lintasan – lintasan yang memiliki ketinggian berbeda seperti lintasan gunung, jurang, serta lintasan lainnya.

Pada penelitian yang telah dilakukan di tahun 2014 [3] dan tahun 2015 [2], keluaran sudut *pitch* dapat diamati dari persamaan model matematika gerak longitudinal pesawat LSU-05. Pada penelitian tersebut, gangguan yang diikutsertakan pada sistem adalah gangguan yang bersifat deterministik yaitu gangguan yang bersifat tetap dan diketahui seberapa besar nilai gangguan. Akan tetapi, gangguan yang terjadi saat LSU-05 terbang di udara adalah gangguan yang bersifat acak atau stokastik.

Oleh karena itu, pada tugas akhir ini, dilakukan perancangan sistem kendali *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) untuk mengendalikan sudut *pitch* pada LSU-05. LQG merupakan sistem kendali yang mengikutsertakan estimator untuk mengurangi kesalahan keluaran akibat gangguan yang bersifat stokastik serta mengikutsertakan gain regulator yang berfungsi sebagai gain *feedback*. Dalam tugas akhir ini, estimator yang diterapkan pada kendali LQG adalah estimator Kalman Filter. Setelah perancangan kendali LQG diterapkan, hasil perancangan disimulasikan dengan *software* Matlab.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas diperoleh rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana mengkaji persamaan model matematika gerak pesawat pada sumbu longitudinal LSU-05 ?
2. Bagaimana merancang sistem kendali LQG pada persamaan model matematika gerak longitudinal LSU-05?

3. Bagaimana hasil simulasi penerapan kendali LQG pada persamaan model matematika gerak longitudinal LSU-05?

### **1.3 Batasan Masalah**

Batasan masalah yang diterapkan dalam Tugas akhir ini adalah :

1. Metode kendali yang akan diterapkan adalah metode kendali LQG.
2. Estimator LQG yang digunakan adalah estimator Kalman filter.
3. Metode LQG akan diterapkan untuk persamaan model matematika gerak longitudinal LSU-05.
4. Data terkait spesifikasi dan model matematika LSU-05 diperoleh dari Pustekbang LAPAN Indonesia.
5. Vektor gangguan pada gerak longitudinal LSU-05 berdistribusi normal.
6. Simulasi perhitungan kendali dilakukan dengan *Software* Matlab 2010a.

### **1.4 Tujuan**

Tujuan dari tugas akhir ini adalah :

1. Mengkaji persamaan model matematika gerak pesawat pada sumbu longitudinal LSU-05.
2. Melakukan desain sistem kendali LQG pada persamaan model matematika gerak longitudinal LSU-05.
3. Melakukan simulasi kendali LQG pada persamaan model matematika gerak longitudinal LSU-05.

### **1.5 Manfaat**

Manfaat dari tugas akhir ini adalah :

1. Memberikan kontribusi untuk perkembangan ilmu pengetahuan khususnya teknik kendali untuk UAV.

2. Hasil simulasi dapat digunakan sebagai referensi dalam implementasi ke perangkat keras sistem kendali LSU-05.

## **1.6 Sistematika Penulisan**

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, antara lain:

### **1. BAB I PENDAHULUAN**

Pada Bab I dijelaskan gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

### **2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Pada Bab II diuraikan tentang teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir, antara lain informasi terkait LSU-05, sistem sumbu badan pesawat, definisi dan teoreman terkait kestabilan, keterkontrolan dan keteramatan, kendali LQG, kendali integral, penurunan rumus Aljabar Riccati serta Deret Taylor.

### **3. BAB III METODE PENELITIAN**

Dalam bab III dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahap pertama adalah analisa model matematika gerak longitudinal pesawat yang meliputi transformasi sudut, kaji gerak translasi, kaji gerak rotasi dan linearisasi persamaan. Tahap kedua adalah perancangan kendali LQG yang meliputi perancangan estimator Kalman filter, perancangan gain *feedback* regulator serta perancangan kendali integral. Tahap ketiga adalah simulasi dengan simulink MATLAB. Selanjutnya dilakukan pengamatan karakteristik respon sistem. Setelah itu dilakukan penyusunan laporan.

#### BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab IV mengkaji secara detail tentang analisa penurunan gerak pesawat yang meliputi transformasi sudut, kaji gerak translasi, kaji gerak rotasi dan linearisasi persamaan. Selanjutnya perancangan kendali LQG yang meliputi perancangan estimator Kalman filter, perancangan gain *feedback* regulator serta perancangan kendali integral. Pada tahap perancangan ini, juga dibahas terkait kondisi kestabilan sistem. Kemudian dilakukan simulasi dengan simulink MATLAB serta pengamatan respon sistem hasil simulasi

#### BAB V PENUTUP

Bab V berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan.”*

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 LSU-05

LSU-05 merupakan varian baru dari pesawat tanpa awak buatan Pusat Teknologi Penerbangan (Pustekbang) LAPAN yang dirilis sejak tahun 2013. Misi LSU-05 adalah untuk kegiatan penelitian, observasi, patroli, pengawasan perbatasan wilayah dan investigasi bencana alam. Berikut adalah gambar dari LSU-05 :



**Gambar 2.1 LSU-05 [2]**

Berikut adalah tabel spesifikasi LSU-05 [2]:

**Tabel 2.1 Spesifikasi LSU-05**

No	Simbol	Nama	Besaran	Keterangan
1	MTOW	<i>Maximum Take Off Weight</i>	75,08	$W=mg$
2	M	Massa Total	7,7346 kg	massa pesawat termasuk muatan bahan bakar
3	Uo	Kecepatan <i>cruise</i>	27,28 m/s	Kecepatan UAV pada saat keadaan <i>cruise</i>



4	B	Panjang bentang sayap	5,5 m	bentang sayap
5	S	Luas Permukaan Sayap	3,32 m <sup>2</sup>	
6	H	Tinggi terbang	6000 m	
7	$\rho$	Rho udara	0,6601 $\frac{\text{km}}{\text{m}^3}$	Kecepatan udara di 6000 m
8	T	Lama terbang	6 jam	Lama terbang berdasarkan bahan bakar
9	$\pi$	Phi	3,14	
10	Q	Kecepatan rotasi	0,5* $\rho$ * $U_0^2$	Kecepatan terhadap sumbu y

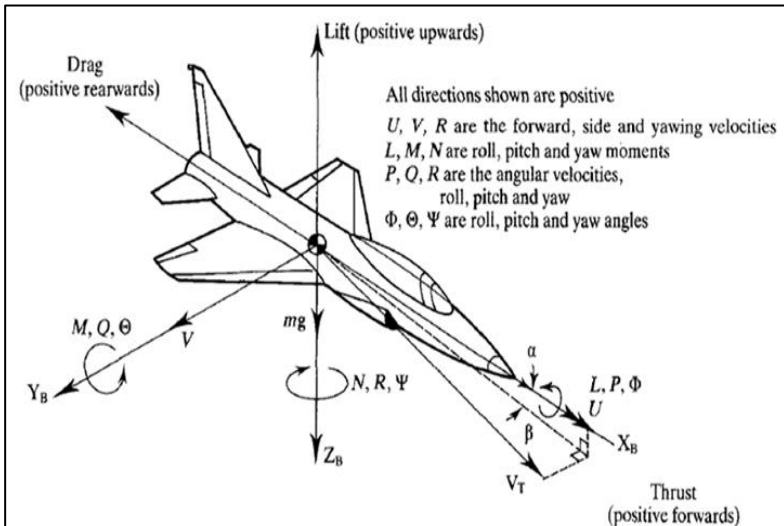
## 2.2 Sistem Sumbu Pesawat

Sistem sumbu badan pesawat terhadap bumi dibagi menjadi 3 bagian, yaitu sumbu  $X_B$ ,  $Y_B$  dan  $Z_B$ . Sumbu  $X_B$  adalah sumbu sepanjang longitudinal pesawat dengan nilai positif ke arah depan, sumbu  $Y_B$  tegak lurus pada bidang simetri dan positif ke arah kanan dan sumbu  $Z_B$  pada bidang simetri tegak pesawat dan positif ke bawah.

Pesawat merupakan benda yang mampu bergerak dengan enam derajat kebebasan. Tiga gerakan yang searah dengan sumbu koordinat pesawat adalah gerak maju mundur sesuai dengan arah sumbu  $x$ , gerak ke kanan dan ke kiri sesuai dengan arah sumbu  $y$ , gerak ke atas ke bawah sesuai dengan arah sumbu  $z$ . Tiga gerakan lainnya dipengaruhi oleh gerak rotasi pesawat yaitu gerak *rolling* (gerak untuk berguling ke kanan atau ke kiri, gerak ini adalah gerak mengitari sumbu  $x$ ), gerak *pitching* (gerak untuk mengangguk ke atas atau ke bawah, gerak ini adalah gerak

mengitari sumbu  $y$ ) dan gerak *yawing* (gerak berbelok ke kanan atau ke kiri, gerak ini adalah gerak mengitari sumbu  $z$ ).

Sistem sumbu ini dilakukan untuk memodelkan sistem ke ruang keadaan. Sistem sumbu badan pesawat ditunjukkan pada Gambar 2.2.



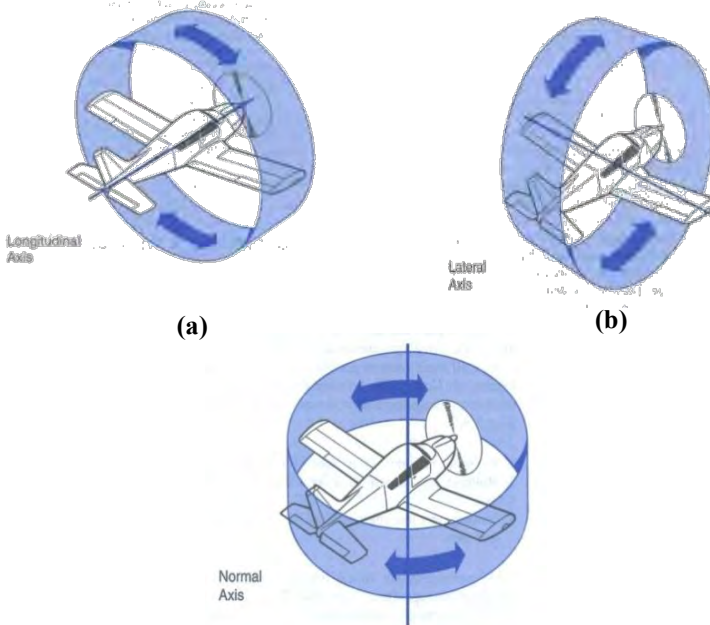
**Gambar 2.2 Sumbu Badan Pesawat**

Pada gambar 2.2 dicantumkan beberapa notasi dari komponen persamaan gerak pesawat. Gerak translasi pesawat diberikan oleh komponen kecepatan yaitu  $U, V$  dan  $W$  pada arah  $X_B, Y_B$  dan  $Z_B$ . Gerak rotasi diberikan oleh komponen kecepatan sudut  $P, Q$  dan  $R$  yang menyebabkan momen aerodinamika  $L, M, N$  serta momen inersia  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  pada sumbu  $X_B, Y_B$  dan  $Z_B$ . Perubahan gerak sudut pada pesawat diberikan oleh komponen  $\Phi$  (sudut *roll*),  $\Theta$  (sudut *pitch*) dan  $\Psi$  (sudut *yaw*). Berikut adalah tabel dari komponen komponen gerak pesawat :

**Tabel 2.2 Komponen Gerak Pesawat**

Komponen	Sumbu $X_B$	Sumbu $Y_B$	Sumbu $Z_B$
Kecepatan Translasi	$U$	$V$	$W$
Kecepatan Rotasi	$P$	$Q$	$R$
Perubahan Sudut Rotasi	$\Phi$	$\Theta$	$\Psi$
Momen Inersia	$I_{xx}$	$I_{yy}$	$I_{zz}$
Momen aerodinamika	$L$	$M$	$N$
Gaya Aerodinamika	$X$	$Y$	$Z$

Gerak *roll*, *pitch* dan *yaw* pada pesawat secara lebih jelas dapat dilihat pada gambar di bawah ini :



**Gambar 2.3 (a) Gerak *rolling* (b) Gerak *pitching* (c) Gerak *yawing***

## 2.3 Kestabilan

Berikut adalah teorema dari kestabilan.[4]

### Teorema 2.3.1

Diberikan persamaan diferensial  $\dot{x} = Ax$  dengan matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda.  $\lambda_1, \dots, \lambda_k (k \leq n)$ .

- Titik asal  $\bar{x} = 0$  adalah stabil asimtotik jika hanya jika  $\text{Re} \lambda_i < 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$ .
- Titik asal  $\bar{x} = 0$  adalah stabil jika dan hanya jika  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$  dan untuk semua  $\lambda_i$  dengan  $\text{Re} \lambda_i = 0$  multisiplitas aljabar sama dengan multisiplitas geometri nya.
- Titik asal  $\bar{x} = 0$  adalah tidak stabil jika dan hanya jika  $\text{Re} \lambda_i < 0$  untuk beberapa nilai  $i = 1, \dots, k$  atau ada  $\lambda_i$  dengan  $\text{Re} \lambda_i = 0$  dan multisiplitas aljabar lebih besar dari multisiplitas geometri nya.

## 2.4 Keterkontrolan dan Keteramatan

Diberikan sistem linear invarian waktu yang disajikan oleh persamaan berikut : [4]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2.7}$$

### Definisi 2.4.1

Sistem pada persamaan (2.7) dikatakan terkontrol atau terkendali bila untuk sebarang keadaan  $x(0) = x_0$  terdapat masukan  $u(t)$  yang mampu mentransfer keadaan awal  $x_0$  menjadi keadaan akhir  $x_t$ .

### Teorema 2.4.1

Syarat perlu dan cukup suatu sistem dikatakan terkontrol jika matriks :

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

memiliki rank sama dengan  $n$ .

### Definisi 2.4.2

Sistem pada persamaan (2.7) dikatakan teramati jika setiap keadaan awal  $x(0) = x_0$  dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem dari waktu  $t = 0$  ke  $t = t_f$ .

### Teorema 2.4.2

Syarat perlu dan cukup suatu sistem dikatakan teramati jika matriks :

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

memiliki rank sama dengan  $n$ .

## 2.5 Kendali LQG

Metode LQG adalah teknik kendali modern yang diimplementasikan dalam bentuk ruang dan waktu (*state space*) yang digunakan untuk mendesain dinamik optimal regulator. Berdasarkan sistem kontinu, model sistem waktu linear stokastik dibangun oleh persamaan diferensial : [5]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t) \quad (2.8)$$

$$y(t) = Cx(t) + n(t) \quad (2.9)$$

dengan keterangan sebagai berikut :

$A_{n \times n}$  = Matriks ruang keadaan

$B_{n \times m}$  = Matriks masukkan kendali

$G_{n \times p}$  = Matriks masukkan gangguan

$C_{r \times n}$  = Matriks keteramatan

$x(t)_{n \times 1}$  = Vektor ruang keadaan

$y(t)_{r \times 1}$  = Vektor keteramatan

$u_c(t)_{m \times 1}$  = Vektor kendali

$\xi(t)_{p \times 1}$  = Vektor gangguan acak

$n(t)_{r \times 1}$  = Gangguan

Matriks  $A, B, G$  dan  $C$  bersifat invarian waktu.

Kemudian sistem akan diestimasi oleh observer Kalman Filter sistem kontinu, sehingga diperoleh :

$$\hat{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu_c(t) + K_f[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (2.10)$$

dengan  $K_f$  adalah gain Kalman Filter dengan memperkecil nilai error.

$$e(T) = \delta\{\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2\} = \delta\{e(t)'e(t)\} \quad (2.11)$$

$$K_f = P_f C^T R_f^{-1} \quad (2.12)$$

dengan  $P_f$  adalah varians dari error dan diperoleh dari penyelesaian persamaan varians Aljabar Riccati sebagai berikut :

$$AP_f + P_f A' + GQ_f G' - P_f C' R_f^{-1} C P_f = 0 \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) memiliki beberapa solusi. Solusi yang tepat memiliki  $Q_f$  dan  $R_f$  yang bersifat simetri, matriks semi definit positif untuk  $R_f$  atau matriks definit positif untuk  $Q_f$ .

Kondisi ini menunjukkan bahwa sistem dapat teramati sehingga nilai  $P_f$  ada dan bersifat semi definit positif. Dengan asumsi bahwa  $P_f$  ada, dinamika error dari filter dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= [Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t)] - [A\hat{x}(t) + Bu_c(t) + K_f(y(t) - C\hat{x}(t))] \\ &= [Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t)] - [A\hat{x}(t) + Bu_c(t) + K_f(Cx(t) + n(t) - C\hat{x}(t))] \\ &= [Ax(t) - A\hat{x}(t) + Bu(t) - Bu(t) + G\xi(t) - K_f(Cx(t) - C\hat{x}(t) + n(t))] \\ &= [Ae(t) + G\xi(t) - K_f(Ce(t) + n(t))] \\ &= [Ae(t) - K_f Ce(t) + G\xi(t) - K_f n(t)] \\ &= [A - K_f C]e(t) + [G - K_f] \begin{bmatrix} \xi(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pada persamaan (2.14), pole dari  $[A - K_f C]$  adalah pole dari filter dan harus bersifat stabil agar filter mampu diterapkan pada sistem.

Hukum kendali minimal diberikan oleh :

$$u_c(t) = -K_c \hat{x}(t) \quad (2.15)$$

dengan  $K_c$  adalah gain regulator yang diberikan oleh matriks:

$$K_c = R_c^{-1} B^T P \quad (2.16)$$

$\hat{x}(t)$  adalah estimasi dari  $x(t)$ , berdasarkan pada ukuran dari  $y(\tau), \tau \leq t$ . Pada persamaan (2.16),  $P$  konstan, matriks simetri, semi definit positif dan diperoleh dari penyelesaian Aljabar Riccati berikut :

$$A'P + PA - PBR_c^{-1}B'P + H'H = 0 \quad (2.17)$$

Substitusi persamaan (2.15) ke dalam persamaan (2.10) maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B[-K_c \hat{x}(t)] + K_f[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ &= [A - BK_c - K_f C]\hat{x}(t) + K_f y(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Selanjutnya akan dikombinasikan persamaan (2.8) dan persamaan (2.15) untuk memeriksa kestabilan sistem dengan menerapkan kendali LQG, sehingga diperoleh :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK_c \hat{x}(t) + G\xi(t) \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} &= Ax(t) - BK_c \hat{x}(t) + BK_c x(t) - BK_c x(t) + G\xi(t) \\ &= Ax(t) + BK_c (x(t) - \hat{x}(t)) - BK_c x(t) + G\xi(t) \\ &= Ax(t) - BK_c x(t) + BK_c e(t) + G\xi(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Serta variabel estimasi :

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - BK_c - K_f C]\hat{x}(t) + K_f Cx(t) + K_f n(t) \quad (2.21)$$

Selanjutnya akan dikombinasikan persamaan (2.20) dan persamaan (2.21) sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_c \\ K_f C & A - BK_c - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

dan diberikan pole lup tertutup LQG sebagai berikut :

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I - A & BK_c \\ -K_f C & \lambda I - A + BK_c + K_f C \end{bmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

Selanjutnya dilakukan penyusunan kembali bentuk persamaan (2.22) dengan mengikutsertakan variabel error ( $e$ ) yang telah diperoleh pada persamaan (2.14) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 \\ G & -K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

maka dapat diperoleh pole dari sistem LQG adalah sebagai berikut :

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I - A + BK_c & -BK_c \\ 0 & \lambda I - A + K_f C \end{bmatrix} = 0 \quad (2.25)$$

Jika pole pada persamaan (2.25) stabil maka kendali LQG dapat diterapkan pada sistem yang akan dikendalikan.

## 2.6 Kendali LQG dengan Aksi Integral

Pada sub bab sebelumnya telah dijelaskan terkait gain Kalman ( $K_f$ ) dan gain Regulator ( $K_c$ ). Kedua nilai gain ini berfungsi untuk memperbaiki perilaku sistem, akan tetapi hasil kestabilan sistem belum tentu sesuai dengan yang diinginkan. Oleh karena itu dibutuhkan perancangan ulang sistem dengan mengubah struktur sistem atau menambahkan sebuah alat dengan tujuan mendapatkan spesifikasi respon sistem yang diinginkan [8].

Untuk mendesain sistem agar sesuai dengan keluaran, akan ditambahkan gain integrator ke dalam lintasan umpan ke depan antara referensi dengan keluaran sistem. Diberikan sistem sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t) \\ \hat{\hat{x}}(t) &= [A - K_f C]\hat{\hat{x}}(t) + Bu_c(t) + K_f Cx(t) + K_f n(t) \end{aligned}$$

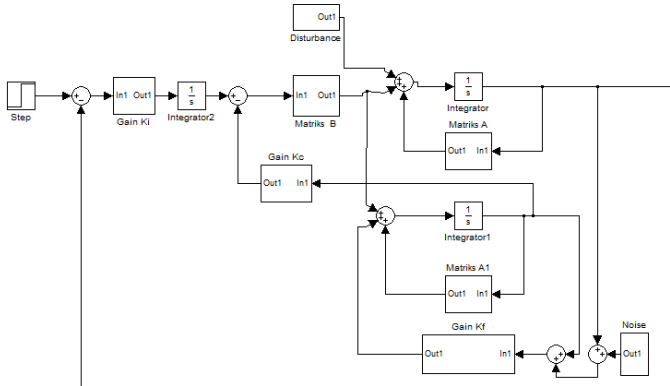
dan



$$u_c(t) = -K_c \hat{x} + K_i \varepsilon \quad (2.26)$$

$$\dot{\varepsilon} = r - C\hat{x} \quad (2.27)$$

sehingga dapat digambarkan diagram blok kendali LQG dengan aksi integral adalah sebagai berikut :



### Gambar 2.4 LQG dengan Aksi Integral

Nilai gain  $K_i$  diperoleh dengan cara *trial and error*. Setelah diperoleh gain  $K_i$ , maka persamaan sistem secara keseluruhan menjadi :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \hat{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A & -BK_c & BK_i \\ A - BK_c - K_f C & K_f C & KfC & BK_i \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & K_f & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ n(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

## 2.8 Hubungan Aljabar Riccati dengan Gain Kalman Filter

Kalman filter adalah estimator optimal yang diterapkan pada sistem dinamik. Dengan diterapkannya Kalman Filter, maka akan dapat diketahui kondisi sistem ke- $n$  dan waktu ke- $n$ . Untuk menerapkan Kalman Filter pada suatu sistem dibutuhkan model matematika+noise dan model pengukuran.

Persamaan Kalman Filter kontinu diperoleh dari penurunan persamaan Kalman Filter diskrit [6].

Diberikan sistem dinamik kontinu :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t) \quad (2.29)$$

$$y(t) = Cx(t) + n(t) \quad (2.30)$$

Jika periode sampling  $T$  yang diberikan kecil, maka persamaan diskrit dari (2.29) dan (2.30) dapat ditulis sebagai berikut :

$$x_{k+1} = (I + AT)x_k + BTu_{c_k} + G\xi_k \quad (2.31)$$

$$y_k = Cx_k + n_k \quad (2.32)$$

Sehingga persamaan kovarians dari sistem (2.31) dan (2.32) adalah :

$$\bar{P}_{k+1} = (I + AT)P_k(I + AT)' + GQG'T \quad (2.33)$$

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1}C' \left( C\bar{P}_{k+1}C' + \frac{R}{T} \right)^{-1} \quad (2.34)$$

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1}C) \bar{P}_{k+1} \quad (2.35)$$

Dengan periode sebanyak  $T$ , maka persamaan (2.34) dapat ditulis dengan :

$$K_k = T(\bar{P}_kC'(C\bar{P}_kC'T + R)^{-1}) \quad (2.36)$$

Untuk nilai  $T$  mendekati 0, maka :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} K_k &= T(\bar{P}_kC'(C\bar{P}_kC'T + R)^{-1}) \\ K_k &= \bar{P}_kC'R^{-1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Selanjutnya persamaan (2.33) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\bar{P}_{k+1} = P_k + (AP_k + P_kA' + GQG')T + O(T^2) \quad (2.38)$$

Selanjutnya persamaan (2.38) disubsitusikan ke persamaan (2.35), sehingga diperoleh persamaan :

$$P_{k+1} = (I - K_k C)(P_k + (AP_k + P_k A' + GQG')T + O(T^2)) \quad (2.39)$$

Dengan membagi persamaan (2.39) dengan periode  $T$ , dimana  $T$  mendekati 0, maka persamaan menjadi :

$$P(kT) = \bar{P}_k$$

Kembali pada persamaan (2.39) :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (P_k + (AP_k + P_k A' + GQG')T + O(T^2)) \\ &\quad - (K_k C)(P_k + (AP_k + P_k A' + GQG')T + O(T^2)) \\ P_{k+1} - P_k &= (AP_k + P_k A' + GQG')T + O(T^2) \\ &\quad - (K_k C)(P_k + (AP_k + P_k A' + GQG')T + O(T^2)) \\ \frac{(P_{k+1} - P_k)}{T} &= (AP_k + P_k A' + GQG') + O(T) \\ &\quad - (K_k C)(P_k + (AP_k + P_k A' + GQG')T + O(T)) \end{aligned}$$

Dengan  $T \rightarrow 0$ , maka diperoleh :

$$\dot{P}(t) = AP + PA' + GQ_f G' - PC'R_f^{-1}CP \quad (2.40)$$

karena  $P$  konstan, maka :

$$0 = AP + PA' + GQ_f G' - PC'R_f^{-1}CP \quad (2.41)$$

Persamaan (2.41) merupakan persamaan Aljabar Riccati untuk penyelesaian nilai  $P_f$  pada Kalman Filter kontinu.

## 2.9 Hubungan Aljabar Riccati dengan Gain Regulator

Pada sistem linear, *state* sistem dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + Bu_c \quad (2.42)$$

dapat diperoleh Aljabar Riccati dari persamaan Hamiltonian berikut [10] :

$$H = \frac{1}{2}x'Qx + \frac{1}{2}u_c'Ru_c + \lambda'(Ax + Bu_c) \quad (2.43)$$

Dari persamaan (2.42), diperoleh nilai *co-state* adalah :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.44)$$

$$\dot{\lambda} = -Qx - A'\lambda \quad (2.45)$$

Kemudian untuk mendapatkan kondisi optimal, maka :

$$\frac{\partial H}{\partial u_c} = 0 = Ru_c + B'\lambda \quad (2.46)$$

Sehingga :

$$u_c = -R^{-1}B'\lambda(t) \quad (2.47)$$

Kemudian dilakukan substitusi persamaan (2.47) ke dalam persamaan (2.42), sehingga diperoleh :

$$\dot{x} = Ax + B(-R^{-1}B'\lambda) = Ax - BR^{-1}B'\lambda \quad (2.48)$$

Sehingga persamaan (2.45) dan (2.48) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Kemudian dengan melakukan pemisalan :

$$\lambda = Px \quad (2.50)$$

maka turunan persamaan (2.50) adalah :

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} \quad (2.51)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.48) dan (2.50) ke dalam persamaan (2.51) diperoleh persamaan :

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B'Px) \quad (2.52)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi persamaan (2.45) dan (2.52), sehingga persamaan menjadi :

$$-Qx - A'Px = \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B'Px)$$

$$-\dot{P}x = PAx + A'Px - PBR^{-1}B'Px + Qx$$

Karena nilai  $P$  konstan, maka  $\dot{P} = 0$ , sehingga :

$$0 = PAx + A'Px - PBR^{-1}B'Px + Qx \quad (2.53)$$

Persamaan (2.53) merupakan persamaan Aljabar Riccati untuk penyelesaian nilai  $P_c$  .

## 2.10 Deret Taylor

Diketahui persamaan Deret Taylor adalah sebagai berikut :

$$f(x) = f(x)_r + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_r \Delta x + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Big|_r \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \Big|_r \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.54)$$

dengan

$$\Delta x = x - x_0 \quad (2.55)$$

Dengan menggunakan Deret Taylor orde pertama, maka persamaan (2.54) menjadi :

$$F(x) = F(x)_r + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \Big|_r \Delta x \quad (2.56)$$

Dengan  $F(x)_r = 0$ , maka persamaan (2.56) menjadi [9] :

$$F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \Big|_r \Delta x \quad (2.57)$$

Jika terdapat  $n$  variabel, maka persamaan (2.56) menjadi :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Big|_r \Delta x_1 + \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \Big|_r \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Big|_r \Delta x_n \quad (2.58)$$

dengan

$n$  = banyak variabel

Persamaan (2.58) merupakan persamaan Deret Taylor orde pertama untuk  $n$  variabel yang dapat digunakan untuk linearisasi sistem.



### **BAB III**

## **METODE PENELITIAN**

Tahap tahap yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

#### 1. Analisis Pemodelan Gerak Longitudinal LSU-05

Pada penelitian ini yang pertama dilakukan adalah melakukan analisis terkait pemodelan gerak longitudinal LSU-05. Tahap analisis yang dilakukan meliputi tahap penurunan persamaan gerak pesawat, linearisasi dengan deret Taylor dan pembentukan model gerak longitudinal. Pada tahap penurunan persamaan gerak pesawat dilakukan analisis untuk transformasi sumbu  $x$ - $y$ - $z$ , transformasi persamaan kecepatan sudut, persamaan akibat gerak translasi serta persamaan akibat gerak rotasi. Setelah ketiga tahap tersebut selesai, maka dilakukan penambahan matriks gangguan yang berdistribusi normal pada matriks model gerak longitudinal LSU-05.

#### 2. Perancangan Kendali LQG

Pada tahap ini, dirancang kendali LQG untuk kestabilan sudut *pitch* LSU-05. Hal pertama yang dilakukan adalah merancang estimator Kalman Filter kontinu yang menghasilkan gain Kalman Filter, kemudian merancang gain *feedback* (gain regulator). Apabila pada saat simulasi, gerak *pitch* tidak sesuai dengan *setpoint* yang diinginkan, maka ditambahkan gain integrator. Gain integrator ini berfungsi untuk meminimumkan error. Pada tahap ini, gain regulator dan gain integrator dicari dengan metode *trial and error*.

#### 3. Simulasi dan Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini, simulasi dilakukan dengan Simulink pada piranti lunak MATLAB. Selanjutnya dilakukan pengamatan respon simulasi dari keluaran sudut *pitch*. Spesifikasi respon transien yang diamati antara lain [8] :

- Waktu tunda (*Delay Time* /  $t_d$ )  
Adalah waktu yang diperlukan respon untuk mencapai setengah harga akhir yang pertama kali.
- Waktu naik (*Rise Time* /  $t_r$ )  
Adalah waktu yang diperlukan respon untuk naik dari 10 % sampai 90 %, 5 % sampai 95 % atau 0 sampai 100 %.
- Waktu puncak (*Peak Time* /  $t_p$ )  
Adalah waktu yang diperlukan respon mencapai puncak lewatan yang pertama kali.
- Persen lewatan maksimum (*Maximum overshoot* /  $M_p$ )  
Adalah harga puncak maksimum dari kurva respon yang diukur dari satu. Jika harga keadaan tunak, respon tidak sama dengan satu, maka bisa digunakan persen lewatan maksimum. Parameter ini didefinisikan sebagai :

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

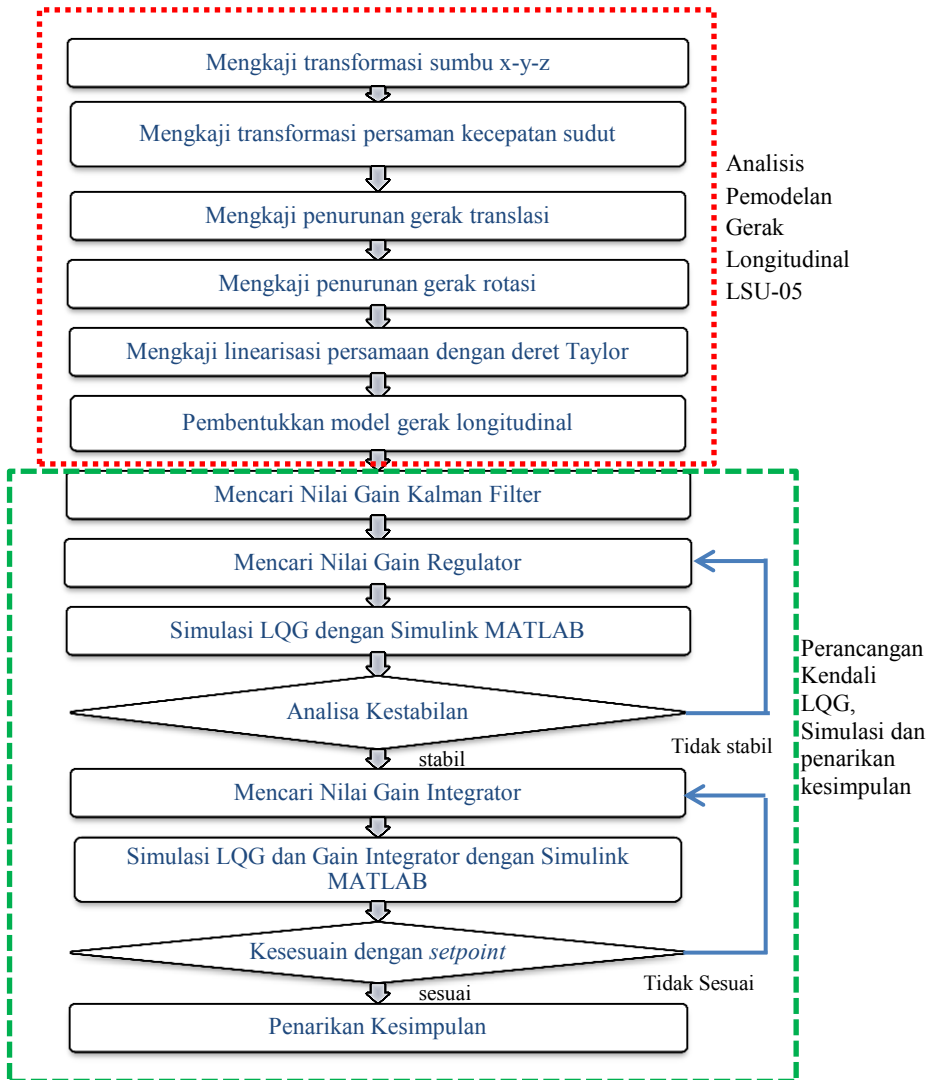
Besarnya  $M_p$  secara langsung menunjukkan kestabilan sistem relatif.

- Waktu penetapan (*Settling Time* /  $t_s$ )  
Adalah waktu yang diperlukan kurva respon untuk mencapai dan menetap dalam daerah di sekitar harga akhir yang ukurannya ditentukan dengan presentase mutlak dari harga akhir (biasanya 10 % atau 2 %).

#### 4. Penyusunan Laporan



Berikut adalah gambar diagram alir metode penelitian :



**Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian**

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

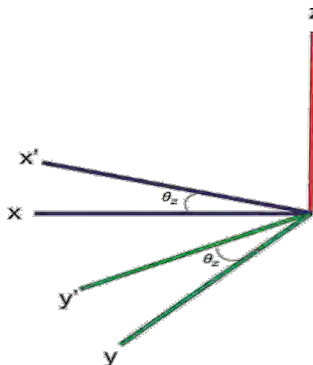
### 4.1 Penurunan Persamaan Gerak Pesawat

Pada sub bab ini, akan dikaji penurunan persamaan gerak pesawat. Dalam mengkaji persamaan gerak pesawat, akan dilakukan transformasi sumbu koordinat pesawat untuk mendapatkan matriks transformasi sumbu. Setelah itu matriks transformasi sumbu akan digunakan untuk mencari persamaan kecepatan sudut pada pesawat. Kemudian akan dikaji persamaan gerak translasi dan gerak rotasi pada pesawat [9].

#### 4.1.1 Transformasi Sumbu Koordinat Pesawat

Tujuan transformasi sumbu adalah untuk mengetahui koordinat badan pesawat terhadap koordinat bumi. Transformasi sumbu pesawat dilakukan dengan menggunakan metode *Euler angle* (rotasi ke kanan bernilai positif). Barisan rotasi yang sering digunakan dalam dinamika penerbangan adalah 3-2-1 atau  $z - y - x$  di mana transformasi dilakukan terhadap sumbu  $z$ , sumbu  $y$  dan kemudian sumbu  $x$ .

Diberikan sebuah sumbu  $x, y$  dan  $z$  pada pesawat yang kemudian ditransformasikan terhadap sumbu  $z$  :



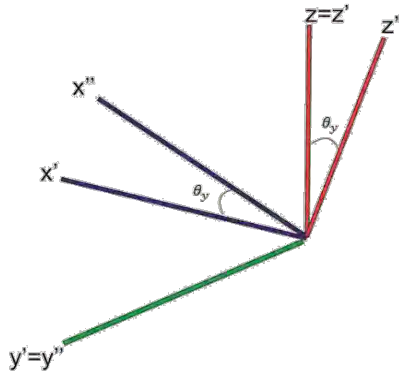
**Gambar 4.1 Transformasi Terhadap Sumbu  $z$**

Dari gambar 1, diperoleh nilai vektor transformasi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 Vx' &= Vx \cos x'x + Vy \cos x'y + Vz \cos x'z = \\
 &Vx \cos \theta_z + Vy \cos (90 - \theta_z) + Vz \cos 90 \\
 Vy' &= Vx \cos y'x + Vy \cos y'y + Vz \cos y'z = \\
 &Vx \cos (90 + \theta_z) + Vy \cos \theta_z + Vz \cos 90 \\
 Vz' &= Vx \cos z'x + Vy \cos z'y + Vz \cos z'z = Vx \cos 90 + \\
 &Vy \cos 90 + Vz \cos 0
 \end{aligned}$$

Persamaan  $Vx'$ ,  $Vy'$  dan  $Vz'$  dapat dibentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 [v]' &= T_{F',1}[v]_1 \\
 \begin{bmatrix} Vx' \\ Vy' \\ Vz' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \cos (90 - \theta_z) & \cos 90 \\ \cos (90 + \theta_z) & \cos \theta_z & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{bmatrix} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$



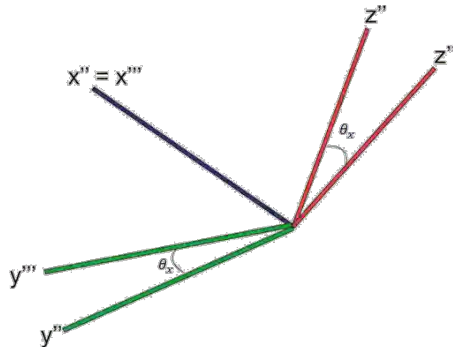
**Gambar 4.2 Transformasi Terhadap Sumbu y**

Dari gambar 2, diperoleh nilai vektor transformasi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
Vx'' &= Vx' \cos x''x' + Vy' \cos x''y' + Vz' \cos x''z' \\
&= Vx' \cos \theta_y + Vy' \cos 90 + Vz' (-\cos (90 - \theta_y)) \\
Vy'' &= Vx' \cos y''x' + Vy' \cos y''y' + Vz' \cos y''z' \\
&= Vx' \cos 90 + Vy' \cos 0 + Vz' \cos 90 \\
Vz'' &= Vx' \cos z''x' + Vy' \cos z''y' + Vz' \cos z''z' \\
&= Vx' \cos (90 + \theta_y) + Vy' \cos 90 + Vz' \cos \theta_y
\end{aligned}$$

Persamaan  $Vx''$ ,  $Vy''$  dan  $Vz''$  dapat dibentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
[v]'' &= T_{F'',F'}[v]' \\
\begin{bmatrix} Vx'' \\ Vy'' \\ Vz'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \cos 90 & -\cos (90 - \theta_y) \\ \cos 90 & \cos 0 & \cos 90 \\ \cos (90 + \theta_y) & \cos 90 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx' \\ Vy' \\ Vz' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx' \\ Vy' \\ Vz' \end{bmatrix} \quad (4.2)
\end{aligned}$$



**Gambar 4.3 Transformasi Terhadap Sumbu x**

Dari gambar 3, diperoleh nilai vektor transformasi sebagai berikut :

$$Vx''' = Vx'' \cos x'''x'' + Vy'' \cos x'''y'' + Vz'' \cos x'''z''$$

$$\begin{aligned}
&= Vx'' \cos 0 + Vy'' \cos 90 + Vz'' \cos 90 \\
Vy''' &= Vx'' \cos y''x'' + Vy'' \cos y'''y'' + Vz'' \cos y'''z'' \\
&= Vx'' \cos 90 + Vy'' \cos \theta_x + Vz'' \cos (90 - \theta_x) \\
Vz''' &= Vx'' \cos z'''x'' + Vy'' \cos z'''y'' + Vz'' \cos z'''z'' \\
&= Vx'' \cos 90 + Vy'' \cos (\theta_x + 90) + Vz'' \cos \theta_x
\end{aligned}$$

Persamaan  $Vx'''$ ,  $Vy'''$  dan  $Vz'''$  dapat dibentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
[v]_2 &= T_{2,F''} [v]'' \\
\begin{bmatrix} Vx''' \\ Vy''' \\ Vz''' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos 90 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos \theta_x & \cos (90 - \theta_x) \\ \cos 90 & \cos (90 + \theta_x) & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx'' \\ Vy'' \\ Vz'' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx'' \\ Vy'' \\ Vz'' \end{bmatrix} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Jika  $Vx = Vx_1$ ,  $Vy = Vy_1$ ,  $Vz = Vz_1$ ,  $Vx''' = Vx_2$ ,  $Vy''' = Vy_2$  dan  $Vz''' = Vz_2$  serta dilakukan transformasi pada keseluruhan sumbu maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$[v]_2 = T_{2,F''} [v]'' = T_{2,F''} T_{F'',F'} [v]' = T_{2,F''} T_{F'',F'} T_{F',1} [v]_1$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Vx''' \\ Vy''' \\ Vz''' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx'' \\ Vy'' \\ Vz'' \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} Vx''' \\ Vy''' \\ Vz''' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx' \\ Vy' \\ Vz' \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} Vx_2 \\ Vy_2 \\ Vz_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx_1 \\ Vy_1 \\ Vz_1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Kemudian anggap bahwa  $\theta_x = \phi =$  sudut *roll* ,  $\theta_y = \theta =$  sudut *pitch* dan  $\theta_z = \psi =$  sudut *yaw* , maka hasil dari persamaan (4.4) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Vx_2 \\ Vy_2 \\ Vz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ +\cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} & \sin \phi \cos \theta \\ \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vx_1 \\ Vy_1 \\ Vz_1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Dimisalkan bahwa  $\begin{bmatrix} Vx_2 \\ Vy_2 \\ Vz_2 \end{bmatrix} = V_2$  ,  $\begin{bmatrix} Vx_1 \\ Vy_1 \\ Vz_1 \end{bmatrix} = V_1$  dan

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ +\cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} & \sin \phi \cos \theta \\ \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ +\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \sin \psi \end{pmatrix} & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} = M_t$$

atau matriks transformasi sumbu koordinat pesawat.

#### 4.1.2 Transformasi Persamaan Kecepatan Sudut

Pada sub bab 4.1.1 telah dijelaskan terkait transformasi vektor pada sumbu  $x, y$  dan  $z$ . Pada sub bab ini akan dibahas terkait kontribusi dari persamaan (4.1) hingga (4.5) dalam menentukan besar kecepatan sudut pada pesawat.

Anggap bahwa kecepatan sudut dari transformasi pada sumbu  $x$  terjadi pada sekitar  $x''$  adalah  $\dot{\theta}_x$  , kecepatan sudut dari transformasi pada sumbu  $y$  terjadi pada sekitar  $y'$  adalah  $\dot{\theta}_y$  dan kecepatan sudut dari transformasi pada sumbu  $z$  terjadi pada sekitar  $z_1$  adalah  $\dot{\theta}_z$ .

$$\omega_2^1 = \dot{\theta}_z k_1 + \dot{\theta}_y j' + \dot{\theta}_x i'' \quad (4.6)$$

Pengaruh urutan transformasi tidak begitu besar, sehingga dapat dimisalkan  $k_1 = k'$ ,  $j' = j''$  dan  $i'' = i_2$ .

$$[k']_{F'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [j'']_{F''} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[k']_2 = T_{2,F'}[k']_{F'} \quad (4.8)$$

$$[j'']_2 = T_{2,F''}[j'']_{F''} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} T_{2,F'} &= T_{2,F''} T_{F'',F'} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ \sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x & \sin \theta_x \cos \theta_y \\ \cos \theta_x \sin \theta_y & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan transformasi dari nilai  $\omega$  awal menjadi  $\omega_2$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} [\omega_2^1]_2 &= \dot{\theta}_z [k']_2 + \dot{\theta}_y [j'']_2 + \dot{\theta}_x i_2 \\ &= \dot{\theta}_z T_{2,F'}[k']_{F'} + \dot{\theta}_y T_{2,F''}[j'']_{F''} + \dot{\theta}_x i_2 \\ &= \dot{\theta}_z \begin{bmatrix} -\sin \theta_y \\ \sin \theta_x \cos \theta_y \\ \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix} + \dot{\theta}_y \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_x \\ -\sin \theta_x \end{bmatrix} + \dot{\theta}_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$[\omega_2^1]_2 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x - \sin \theta_y \dot{\theta}_z \\ \dot{\theta}_y \cos \theta_x + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \cos \theta_y \\ -\dot{\theta}_y \sin \theta_x + \dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Dengan mengubah  $\omega_x = p$ ,  $\omega_y = q$ ,  $\omega_z = r$  serta  $\theta_x = \Phi$ ,  $\theta_y = \Theta$ ,  $\theta_z = \Psi$ , maka persamaan (4.12) dapat ditulis sebagai berikut :

$$P = \dot{\Phi} - \Psi \sin \Theta \quad (4.13)$$

$$Q = \dot{\Theta} \cos \Phi + \Psi \cos \Theta \sin \Phi \quad (4.14)$$

$$R = -\dot{\Theta} \sin \Phi + \Psi \cos \Theta \cos \Phi \quad (4.15)$$



$P, Q$  dan  $R$  adalah kecepatan sudut pesawat dengan satuan  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

#### 4.1.3 Gerak Translasi

Gerak tranlasi pada pesawat adalah gerak yang searah dengan sumbu  $x, y$  dan  $z$ . Persamaan gerak translasi diturunkan dari Hukum Newton II :

$$\Sigma F = m \cdot a \quad (4.16)$$

dengan percepatan  $a = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_T$  sehingga

$$\Sigma \mathbf{F} = m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_T)_E \quad (4.17)$$

dengan keterangan sebagai berikut :

$\mathbf{F}$  = Gaya (satuan : N (Newton) =  $\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2}$ )

$(\mathbf{v}_T)_E$  = kecepatan translasi pesawat terhadap bumi ( $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ )

$m$  = massa (kg)

Resultan gaya yang bekerja pada pesawat adalah :

$$\Sigma F = F + F_{gravity} \quad (4.18)$$

Representasi rata-rata perubahan  $\mathbf{V}_T$  relatif terhadap sistem sumbu bumi diberikan dalam persamaan berikut.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_T)_E = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_T) \Big|_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_T$$

dengan  $(\mathbf{v}_T)_B$  adalah kecepatan translasi pesawat terhadap sumbu badan. Sehingga persamaan (4.17) menjadi :

$$\Sigma \mathbf{F} = m \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_T) \Big|_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_T \right) \quad (4.19)$$

Jika diketahui vektor kecepatan linier dan anguler total :

$$\mathbf{v}_T = \hat{i}U + \hat{j}V + \hat{k}W \quad (4.20)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{i}P + \hat{j}Q + \hat{k}R \quad (4.21)$$

dengan  $\hat{i}, \hat{j}$  dan  $\hat{k}$  merepresentasikan vektor pada sumbu  $x, y, z$ .

maka :

$$\left. \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_T) \right|_B = \hat{i}\dot{U} + \hat{j}\dot{V} + \hat{k}\dot{W} \quad (4.22)$$

dan operasi perkalian silang menghasilkan :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_T &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(QW - VR) + \hat{j}(UR - PW) + \hat{k}(PV - UQ) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Substitusi persamaan (4.22) dan (4.23) ke dalam (4.19) sehingga diperoleh persamaan :

$$\begin{aligned} \Sigma F &= m \left( (\hat{i}\dot{U} + \hat{j}\dot{V} + \hat{k}\dot{W}) + \hat{i}(QW - VR) + \hat{j}(UR - PW) + \hat{k}(PV - UQ) \right) \\ \Sigma F &= m \left( \hat{i}(\dot{U} + QW - VR) + \hat{j}(\dot{V} + UR - PW) + \hat{k}(\dot{W} + PV - UQ) \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sehingga dapat dituliskan resultan gaya pada masing masing sumbu adalah sebagai berikut :

$$\Sigma F_x = m(\dot{U} + QW - VR) \quad (4.25)$$

$$\Sigma F_y = m(\dot{V} + UR - PW) \quad (4.26)$$

$$\Sigma F_z = m(\dot{W} + PV - UQ) \quad (4.27)$$

Gaya akibat pengaruh gravitasi bumi adalah [9]:

$$\Sigma F_g = \hat{i}(-mg \sin \Theta) + \hat{j}(mg \cos \Theta \sin \Phi) + \hat{k}(mg \cos \Theta \cos \Phi) \quad (4.28)$$

Susitansi persamaan (4.18), (4.24) dan (4.28), diperoleh masing masing komponen gaya pada setiap sumbu adalah :

1. Gaya pada sumbu  $x$  :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_x + (F_x)_g = m(\dot{U} + QW - VR) \\ F_x - mg \sin \Theta &= m(\dot{U} + QW - VR) \\ F_x = X &= m(\dot{U} + QW - VR + g \sin \Theta) \end{aligned}$$

2. Gaya pada sumbu  $y$  :

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= F_y + (F_y)_g = m(\dot{V} + UR - PW) \\ F_y + mg \cos \Theta \sin \Phi &= m(\dot{V} + UR - PW) \\ F_y &= Y = m(\dot{V} + UR - PW - g \cos \Theta \sin \Phi)\end{aligned}$$

3. Gaya pada sumbu  $z$  :

$$\begin{aligned}\Sigma F_z &= F_z + (F_z)_g = m(\dot{W} + PV - UQ) \\ F_z + mg \cos \Theta \cos \Phi &= m(\dot{W} + PV - UQ) \\ F_z &= Z = m(\dot{W} + PV - UQ - g \cos \Theta \cos \Phi)\end{aligned}$$

Dari penurunan gerak translasi pada pesawat diperoleh persamaan gaya aerodinamika pada masing-masing sumbu adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}X &= m(\dot{U} + QW - VR + g \sin \Theta) \\ Y &= m(\dot{V} + UR - PW - g \cos \Theta \sin \Phi) \\ Z &= m(\dot{W} + PV - UQ - g \cos \Theta \cos \Phi)\end{aligned}\quad (4.29)$$

#### 4.1.4 Gerak Rotasi

Gerak rotasi pada pesawat adalah gerak pesawat untuk melakukan *rolling*, *pitching* dan *yawing*. Saat melakukan rotasi, dihasilkan momen angular pesawat yang berfungsi untuk mengetahui kecepatan rotasi pesawat.

Momen angular didefinisikan sebagai berikut :

$$H = I\omega \quad (4.30)$$

dengan :

$H$  = Momentum angular pesawat ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )

$I$  = Momen Inersia ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

$\omega$  = Kecepatan sudut ( $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )

Serta persamaan torsi :

$$M = \frac{d}{dt}H + \omega \times H \quad (4.31)$$

$$M = \frac{d}{dt}(I\omega) + \omega \times H = I \frac{d}{dt}(\omega + \omega \times \omega) + \omega \times H \quad (4.32)$$

dengan  $M = \text{torsi (kg. m}^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2})$

Dengan nilai dari  $\omega \times \omega = 0$  serta dari persamaan (4.21) diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\omega = \hat{i}\dot{P} + \hat{j}\dot{Q} + \hat{k}\dot{R} \quad (4.33)$$

Matriks inersia ( $I$ ) didefinisikan sebagai berikut [9] :

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Selanjutnya akan dicari nilai  $h_x, h_y$  dan  $h_z$  :

$$H = I\omega = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}P - I_{xy}Q - I_{xz}R \\ -I_{xy}P + I_{yy}Q - I_{yz}R \\ -I_{xz}P - I_{yz}Q + I_{zz}R \end{bmatrix}$$

Secara umum, pesawat adalah simetri terhadap bidang  $XZ$  sehingga berakibat nilai  $I_{xy} = I_{yz} = 0$  sehingga nilai  $h_x, h_y$  dan  $h_z$  adalah :

$$h_x = I_{xx}P - I_{xz}R \quad (4.35)$$

$$h_y = I_{yy}Q \quad (4.36)$$

$$h_z = -I_{xz}P + I_{zz}R \quad (4.37)$$

Nilai dari

$$I \frac{d}{dt}\omega = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} \\ I_{yy}\dot{Q} \\ -I_{xz}\dot{P} + I_{zz}\dot{R} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Selanjutnya akan dicari nilai  $\omega \times H$  :

$$\begin{aligned} \omega \times H &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ I_{xx}P - I_{xz}R & I_{yy}Q & -I_{xz}P + I_{zz}R \end{vmatrix} \\ &= (-PQI_{xz} + RQI_{zz} - RQI_{yy})\hat{i} + (PRI_{xx} - R^2I_{xz} + P^2I_{xz} - PRI_{zz})\hat{j} + (PQI_{xx} - RQI_{xz} - PQI_{yy})\hat{k} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Selanjutnya persamaan (4.38) dan (4.39) akan disubsitusi pada persamaan (4.32) :

$$\begin{aligned}
 M &= I \frac{d}{dt} (\omega + \omega \times \omega) + \omega \times H \\
 &= \hat{i}(I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - PQI_{xz} + RQI_{zz} - RQI_{yy}) \\
 &\quad + \hat{j}(I_{yy}\dot{Q} + PRI_{xx} - R^2I_{xz} + P^2I_{xz} - PRI_{zz}) + \\
 &\quad \hat{k}(-I_{xz}\dot{P} + I_{zz}\dot{R} + PQI_{xx} - RQI_{xz} - PQI_{yy})
 \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut  $M_x = L, M_y = M$  dan  $M_z = N$ .

$$M_x = L = I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - PQI_{xz} + RQI_{zz} - RQI_{yy} \quad (4.40)$$

$$M_y = M = I_{yy}\dot{Q} + PRI_{xx} - R^2I_{xz} + P^2I_{xz} - PRI_{zz} \quad (4.41)$$

$$M_z = N = -I_{xz}\dot{P} + I_{zz}\dot{R} + PQI_{xx} - RQI_{xz} - PQI_{yy} \quad (4.42)$$

Dari gerak rotasi pesawat, diperoleh tiga persamaan yaitu persamaan (4.40), (4.41) dan (4.42).

## 4.2 Linearisasi

Persamaan (4.13) - (4.15) , (4.27) - (4.29) dan (4.40) - (4.42) adalah persamaan non linear sehingga persamaan – persamaan tersebut akan dilinearisasikan dengan Deret Taylor agar dapat dituliskan ke dalam matriks ruang keadaan.

Dalam hal ini semua variabel diasumsikan mendapatkan gangguan, sehingga :

$$\begin{array}{lll}
 X = X_0 + x & Y = Y_0 + y & Z = Z_0 + z \\
 U = U_0 + u & V = V_0 + v & W = W_0 + w \\
 P = P_0 + p & Q = Q_0 + q & R = R_0 + r \\
 L = L_0 + l & M = M_0 + m & N = N_0 + n \\
 \Phi = \Phi_0 + \phi & \Theta = \Theta_0 + \theta & \Psi = \Psi_0 + \psi
 \end{array}$$

Dengan  $[\ ]_0$  merupakan kondisi awal dan huruf kecil menandakan gangguan. Apabila semua variabel mendapatkan gangguan dan mengalami perubahan, maka persamaan (4.13) – (4.15) menjadi :

$$\begin{aligned}
P_0 + p &= (\dot{\Phi}_0 + \dot{\phi}) - (\dot{\Psi}_0 + \dot{\psi}) \sin(\Theta_0 + \theta) \\
Q_0 + q &= (\dot{\Theta}_0 + \dot{\theta}) \cos(\Phi_0 + \phi) + (\dot{\Psi}_0 + \dot{\psi}) \cos(\Theta_0 + \theta) \sin(\Phi_0 + \phi) \\
R_0 + r &= -(\dot{\Theta}_0 + \dot{\theta}) \sin(\Phi_0 + \phi) + (\dot{\Psi}_0 + \dot{\psi}) \cos(\Theta_0 + \theta) \cos(\Phi_0 + \phi)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Dengan aturan trigonometri, maka persamaan (4.43) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned}
P_0 + p &= (\dot{\Phi}_0 + \dot{\phi}) - (\dot{\Psi}_0 + \dot{\psi})(\sin \Theta_0 \cos \theta + \cos \Theta_0 \sin \theta) \\
Q_0 + q &= (\dot{\Theta}_0 + \dot{\theta})(\cos \Phi_0 \cos \phi - \sin \Phi_0 \sin \phi) + (\dot{\Psi}_0 + \dot{\psi})(\cos \Theta_0 \cos \theta - \sin \Theta_0 \sin \theta)(\sin \Phi_0 \cos \phi + \cos \Phi_0 \sin \phi) \\
R_0 + r &= -(\dot{\Theta}_0 + \dot{\theta})(\sin \Phi_0 \cos \phi + \cos \Phi_0 \sin \phi) + (\dot{\Psi}_0 + \dot{\psi})(\cos \Theta_0 \cos \theta - \sin \Theta_0 \sin \theta)(\cos \Phi_0 \cos \phi - \sin \Phi_0 \sin \phi)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Persamaan (4.27) – (4.29) menjadi :

$$\begin{aligned}
X_0 + x &= m((\dot{U}_0 + \dot{u}) + (Q_0 + q)(W_0 + w) - (V_0 + v)(R_0 + r) + g \sin(\Theta_0 + \theta)) \\
Y_0 + y &= m((\dot{V}_0 + \dot{v}) + (U_0 + u)(R_0 + r) - (P_0 + p)(W_0 + w) - g \cos(\Theta_0 + \theta) \sin(\Phi_0 + \phi)) \\
Z_0 + z &= m((\dot{W}_0 + \dot{w}) + (P_0 + p)(V_0 + v) - (U_0 + u)(Q_0 + q) - g \cos(\Theta_0 + \theta) \cos(\Phi_0 + \phi))
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Dengan aturan trigonometri, maka persamaan (4.45) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned}
X_0 + x &= m((\dot{U}_0 + \dot{u}) + (Q_0 + q)(W_0 + w) - (V_0 + v)(R_0 + r) + g(\sin \Theta_0 \cos \theta + \cos \Theta_0 \sin \theta)) \\
Y_0 + y &= m((\dot{V}_0 + \dot{v}) + (U_0 + u)(R_0 + r) - (P_0 + p)(W_0 + w) - g(\cos \Theta_0 \cos \theta - \sin \Theta_0 \sin \theta)(\sin \Phi_0 \cos \phi + \cos \Phi_0 \sin \phi))
\end{aligned}$$

$$Z_0 + z = m((\dot{W}_0 + \dot{w}) + (P_0 + p)(V_0 + v) - (U_0 + u)(Q_0 + q) - g(\cos \Theta_0 \cos \theta - \sin \Theta_0 \sin \theta)(\cos \Phi_0 \cos \phi - \sin \Phi_0 \sin \phi)) \quad (4.46)$$

Persamaan (4.40) – (4.42) menjadi :

$$\begin{aligned} L_0 + l &= I_{xx}(\dot{P}_0 + \dot{p}) - I_{xz}(\dot{R}_0 + \dot{r}) - (P_0 + p)(Q_0 + q)I_{xz} + \\ &\quad (R_0 + r)(Q_0 + q)I_{zz} - (R_0 + r)(Q_0 + q)I_{yy} \\ M_0 + m &= I_{yy}(\dot{Q}_0 + \dot{q}) + (P_0 + p)(R_0 + r)I_{xx} - \\ &\quad (R_0 + r)^2 I_{xz} + (P_0 + p)^2 I_{xz} - (P_0 + p)(R_0 + r)I_{zz} \\ N_0 + n &= -I_{xz}(\dot{P}_0 + \dot{p}) + I_{zz}(\dot{R}_0 + \dot{r}) + (P_0 + p)(Q_0 + \\ &\quad q)I_{xx} - (R_0 + r)(Q_0 + q)I_{xz} - (P_0 + p)(Q_0 + q)I_{yy} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ketika kondisi rata-rata gangguan sangat kecil, maka dipenuhi asumsi :

1. Perkalian (*product*) antar gangguan kecil dapat dianggap nol.
2. Sinus dari sudut gangguan dapat dianggap sama dengan sudut gangguan, sedangkan cosinus dari sudut gangguan dapat dianggap sama dengan satu.

Kondisi di atas menyebabkan persamaan (4.44) menjadi :

$$\begin{aligned} p &= (\dot{\Phi}_0 + \dot{\phi}) - (\dot{\psi})(\sin \Theta_0 + \cos \Theta_0 \theta) \\ q &= (\dot{\Theta}_0 + \dot{\theta})(\cos \Phi_0 - \sin \Phi_0 \phi) + (\dot{\psi}) \\ &\quad (\cos \Theta_0 - \sin \Theta_0 \theta)(\sin \Phi_0 + \cos \Phi_0 \phi) \\ r &= -(\dot{\Theta}_0 + \dot{\theta})(\sin \Phi_0 + \cos \Phi_0 \phi) + (\dot{\psi}) \\ &\quad (\cos \Theta_0 - \sin \Theta_0 \theta)(\cos \Phi_0 - \sin \Phi_0 \phi) \end{aligned} \quad (4.48)$$

kemudian persamaan (4.46) menjadi :

$$\begin{aligned} x &= m(\dot{u} + Q_0 w + W_0 q - V_0 r - R_0 v + g(\sin \Theta_0 + \cos \Theta_0 \theta)) \\ y &= m(\dot{v} + U_0 r + R_0 u - P_0 w - W_0 p) - g(\cos \Theta_0 - \sin \Theta_0 \theta)(\sin \Phi_0 + \cos \Phi_0 \phi) \\ z &= m(\dot{w} + P_0 v + V_0 p - U_0 q - Q_0 u - g(\cos \Theta_0 - \sin \Theta_0 \theta)(\cos \Phi_0 - \sin \Phi_0 \phi)) \end{aligned} \quad (4.49)$$

dan persamaan (4.47) menjadi :

$$\begin{aligned}
 l &= I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} - (P_0q + Q_0p)I_{xz} + (R_0q + Q_0r)I_{zz} - \\
 &\quad (R_0q + Q_0r)I_{yy} \\
 m &= I_{yy}\dot{q} + (P_0r + R_0p)I_{xx} - (2R_0r - 2P_0p)I_{xz} - \\
 &\quad (P_0r + R_0p)I_{zz} \\
 n &= -I_{xz}\dot{p} + I_{zz}\dot{r} + (P_0q + Q_0p)I_{xx} + (R_0q + \\
 &\quad Q_0r)I_{xz} - (P_0q + Q_0p)I_{yy}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Selain itu, kondisi kesetimbangan dapat disesuaikan kembali jika terjadi hal berikut :

1. Terbang lurus yang menyebabkan  $\dot{\Psi}_0 = 0$ .
2. Terbang simetri menyebabkan  $\Psi = V_0 = 0$ .
3. Terbang dengan sayap mendatar menyebabkan  $\Phi_0 = 0$ .
4. Terbang setimbang menyebabkan  $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$ .

Beberapa kondisi di atas menyebabkan persamaan (4.48) atau persamaan kecepatan sudut menjadi :

$$p = \dot{\phi} - (\dot{\psi})(\sin \Theta_0) \tag{4.51}$$

$$q = \dot{\theta} \tag{4.52}$$

$$r = (\dot{\psi})(\cos \Theta_0) \tag{4.53}$$

persamaan (4.49) atau persamaan gaya pada sumbu  $x, y, z$  menjadi :

$$x = m(\ddot{u} + W_0q + g \cos \Theta_0 \theta) \tag{4.54}$$

$$y = m(\ddot{v} + U_0r - W_0p - g \cos \Theta_0 \phi) \tag{4.55}$$

$$z = m(\ddot{w} - U_0q + g \sin \Theta_0 \theta) \tag{4.56}$$

persamaan (4.50) atau persamaan momen aerodinamika menjadi :

$$l = I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} \tag{4.57}$$

$$m = I_{yy}\dot{q} \tag{4.58}$$

$$n = -I_{xz}\dot{p} + I_{zz}\dot{r} \tag{4.59}$$



Persamaan di atas merupakan persamaan non linear, sehingga akan dilakukan pendekatan linear dengan menggunakan deret Taylor. Sebelum melakukan pendekatan linear, akan didefinisikan bahwa persamaan gaya dan momen aerodinamika adalah fungsi dari beberapa variabel [10] :

$$\begin{aligned}x &= X(u, w, \delta_e, \delta_T) \\y &= Y(v, p, r, \delta_r) \\z &= Z(u, w, \dot{w}, q, \delta_e, \delta_T) \\l &= L(v, p, r, \delta_r, \delta_a) \\m &= M(u, w, \dot{w}, q, \delta_e, \delta_T) \\n &= N(v, p, r, \delta_r, \delta_a)\end{aligned}$$

dengan  $\delta_e$  merupakan defleksi *elevator*,  $\delta_T$  merupakan defleksi *throttle*,  $\delta_a$  merupakan defleksi *aileron* serta  $\delta_r$  merupakan defleksi *rudder*.

Seperti kondisi – kondisi yang telah disebutkan sebelumnya serta dengan menggunakan persamaan (2.58) maka persamaan (4.54) – (4.59) menjadi :

$$\begin{aligned}x &= \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial X}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \\y &= \frac{\partial Y}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial Y}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial Y}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r \\z &= \frac{\partial Z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial Z}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \\l &= \frac{\partial L}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial L}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \Delta \delta_a \\m &= \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial M}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \\n &= \frac{\partial N}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \Delta \delta_a\end{aligned}$$

karena  $u_0 = v_0 = w_0 = \dot{u}_0 = \dot{v}_0 = \dot{w}_0 = p_0 = r_0 = q_0 = \dot{p}_0 = \dot{r}_0 = \dot{q}_0 = \delta_{e0} = \delta_{T0} = \delta_{a0} = \delta_{r0}$  dianggap mendekati 0, maka persamaan di atas menjadi :

$$x = \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (4.60)$$

$$y = \frac{\partial Y}{\partial v} v + \frac{\partial Y}{\partial p} p + \frac{\partial Y}{\partial r} r + \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \delta_r \quad (4.61)$$

$$z = \frac{\partial Z}{\partial u} u + \frac{\partial Z}{\partial w} w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} q + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (4.62)$$

$$l = \frac{\partial L}{\partial v} v + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial r} r + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a \quad (4.63)$$

$$m = \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial w} w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (4.64)$$

$$n = \frac{\partial N}{\partial v} v + \frac{\partial N}{\partial p} p + \frac{\partial N}{\partial r} r + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \delta_a \quad (4.65)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi persamaan (4.54) – (4.56) ke dalam persamaan (4.60) – (4.62) :

$$m(\dot{u} + W_0 q + g \cos \Theta_0 \theta) = \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (4.66)$$

$$m(\dot{v} + U_0 r - W_0 p) - g(\cos \Theta_0 \phi) = \frac{\partial Y}{\partial v} v + \frac{\partial Y}{\partial p} p + \frac{\partial Y}{\partial r} r + \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \delta_r \quad (4.67)$$

$$m(\dot{w} - U_0 q + g \sin \Theta_0 \theta) = \frac{\partial Z}{\partial u} u + \frac{\partial Z}{\partial w} w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} q + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (4.68)$$

serta substitusi persamaan (4.57) – (4.59) ke dalam persamaan (4.63) – (4.65) :

$$-I_{xx}\ddot{p} - I_{xz}\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial v} v + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial r} r + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a \quad (4.69)$$

$$I_{yy}\dot{q} = \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial w} w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (4.70)$$

$$I_{xz}\ddot{p} + I_{zz}\ddot{r} = \frac{\partial N}{\partial v} v + \frac{\partial N}{\partial p} p + \frac{\partial N}{\partial r} r + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \delta_a \quad (4.71)$$

Pada persamaan (4.66) – (4.68), komponen persamaan akan dibagi dengan *massa* ( $m$ ) dan pada persamaan (4.69) – (4.71), komponen persamaan akan dibagi dengan inersia ( $I$ ). Selanjutnya didefinisikan :

$$\begin{aligned}
X_{[\ ]} &= \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial [\ ]} & L_{[\ ]} &= \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial L}{\partial [\ ]} \\
Y_{[\ ]} &= \frac{1}{m} \frac{\partial Y}{\partial [\ ]} & M_{[\ ]} &= \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M}{\partial [\ ]} \\
Z_{[\ ]} &= \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial [\ ]} & N_{[\ ]} &= \frac{1}{I_{zz}} \frac{\partial N}{\partial [\ ]}
\end{aligned}$$

dimana  $[\ ]$  menunjukkan variabel yang terdapat dalam fungsi tersebut. Dengan  $X_{[\ ]}, Y_{[\ ]}, Z_{[\ ]}, L_{[\ ]}, M_{[\ ]}$  dan  $N_{[\ ]}$  adalah nilai parameter turunan stabilitas, maka persamaan (4.66) – (4.71) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\dot{u} = X_u \dot{u} - W_0 q - g \cos \Theta_0 \theta + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T \quad (4.72)$$

$$\dot{v} = Y_v \dot{v} + Y_p p + Y_r r - U_0 r + W_0 p + g \cos \Theta_0 \phi + Y_{\delta_r} \delta_r \quad (4.73)$$

$$\dot{w} = Z_w \dot{w} + Z_q q + U_0 q - g \sin \Theta_0 \theta + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_T} \delta_T \quad (4.74)$$

$$\dot{p} = L_v v + L_p p + L_r r + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} \dot{r} + L_{\delta_r} \delta_r + L_{\delta_a} \delta_a \quad (4.75)$$

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_T} \delta_T \quad (4.76)$$

$$\dot{r} = N_v v + N_p p + N_r r + I_{xz} \dot{p} + N_{\delta_r} \delta_r + N_{\delta_a} \delta_a \quad (4.77)$$

### 4.3 Persamaan Keadaan Gerak Longitudinal

Gerak longitudinal adalah gerak sepanjang sumbu  $x$  dengan tujuan mengontrol sudut *pitch* oleh defleksi *elevator* dan defleksi *throttle*. Gerak longitudinal ini dipengaruhi oleh gaya  $X$ , gaya  $Z$ , momen  $M$ , kecepatan  $u$ , kecepatan  $w$ , laju sudut angguk  $q$  dan sudut angguk itu sendiri  $\theta$  (sudut *pitch*). Pada gerak longitudinal, parameter  $Z_q q$  dan  $Z_{\dot{w}} \dot{w}$  diabaikan.

Persamaan gerak longitudinal adalah sebagai berikut :

$$\dot{u} = X_u u + X_w w - W_0 q - g \cos \Theta_0 \theta + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T$$

$$\dot{w} = Z_u u + Z_w w + U_0 q - g \sin \Theta_0 \theta + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_T} \delta_T$$

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_T} \delta_T$$

Serta untuk melengkapi persamaan keadaan, ditambahkan persamaan :

$$q = \dot{\theta} \quad (4.77)$$

Substitusi persamaan (4.74) ke dalam persamaan (4.76), maka diperoleh :

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_{\dot{w}}(Z_u u + Z_w w + U_0 q - g \sin \Theta_0 \theta + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_T} \delta_T) + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_T} \delta_T$$

Atau dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (M_u + M_{\dot{w}} Z_u) u + (M_w + M_{\dot{w}} Z_w) w + (M_{\dot{q}} + M_{\dot{w}} U_0) q - g M_{\dot{w}} \sin \Theta_0 \theta + (M_{\delta_e} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}) \delta_e + \\ &\quad (M_{\delta_T} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_T}) Z_{\delta_T} \\ \dot{q} &= \tilde{M}_u u + \tilde{M}_w w + \tilde{M}_q q - \tilde{M}_\theta \theta + \tilde{M}_{\delta_e} \delta_e + \tilde{M}_{\delta_T} Z_{\delta_T} \quad (4.78) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \tilde{M}_u &= (M_u + M_{\dot{w}} Z_u) & \tilde{M}_\theta &= g M_{\dot{w}} \sin \Theta_0 \\ \tilde{M}_w &= (M_w + M_{\dot{w}} Z_w) & \tilde{M}_{\delta_e} &= (M_{\delta_e} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}) \\ \tilde{M}_q &= (M_q + M_{\dot{w}} U_0) & \tilde{M}_{\delta_T} &= (M_{\delta_T} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_T}) \end{aligned}$$

Pada sistem sumbu angin, terdapat analisis kestabilan sudut serang ( $\alpha$ ) dan  $\alpha$  adalah salah satu variabel yang terdapat pada *state* gerak longitudinal pesawat. Untuk sudut serang yang kecil terdapat hubungan antara  $\alpha$  dan  $w$  yaitu  $\alpha = \frac{w}{U_0}$ . Adanya hal ini, membuat persamaan (4.74) menjadi :

$$\dot{\alpha} = \frac{Z_u u + Z_w w + U_0 q - g \sin \Theta_0 \theta + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_T} \delta_T}{U_0}$$

Jika didefinisikan :

$$\begin{aligned} Z_u^* &= \frac{Z_u}{U_0} & \tilde{M}_\alpha &= M_w U_0 \\ Z_{\delta_e}^* &= \frac{Z_{\delta_e}}{U_0} & X_\alpha &= X_w U_0 \\ Z_{\delta_T}^* &= \frac{Z_{\delta_T}}{U_0} \end{aligned}$$

maka persamaan gerak longitudinal pesawat menjadi :

$$\dot{u} = X_u u + X_\alpha \alpha - g \cos \Theta_0 \theta + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T \quad (4.79)$$

$$\dot{\alpha} = Z_u^* u + Z_w \alpha + q - \frac{g \sin \Theta_0}{u_0} \theta + Z_{\delta_e}^* \delta_e + Z_{\delta_T}^* \delta_T \quad (4.80)$$

$$\dot{q} = \tilde{M}_u u + \tilde{M}_\alpha \alpha + \tilde{M}_q q - \tilde{M}_\theta \theta + \tilde{M}_{\delta_e} \delta_e + \tilde{M}_{\delta_T} \delta_T \quad (4.81)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (4.82)$$

Persamaan (4.79) – (4.82) merupakan persamaan pesawat untuk gerak longitudinal. Jika persamaan (4.79) – (4.82) dibentuk dalam matriks ruang keadaan  $\dot{x} = Ax + Bu$  dengan  $A$  = matriks keadaan  
 $B$  = matriks input  
maka :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_\alpha & -g \cos \Theta_0 & 0 \\ Z_u^* & Z_w & \frac{-g \sin \Theta_0}{u_0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_\alpha & -\tilde{M}_\theta & \tilde{M}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e}^* & Z_{\delta_T}^* \\ 0 & 0 \\ \tilde{M}_{\delta_e} & \tilde{M}_{\delta_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_T \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Dari matriks keadaan (4.83) dapat diketahui bahwa variabel keadaan untuk gerak longitudinal pesawat terdiri atas kecepatan linear searah sumbu  $x$  ( $u$ ), sudut serang ( $\alpha$ ), laju sudut *pitch* ( $q$ ) dan sudut *pitch* ( $\theta$ ). Input dari sistem berupa defleksi elevator ( $\delta_e$ ) dan defleksi *throttle* ( $\delta_T$ ).

Pada analisa kestabilan gerak longitudinal ini, output yang diharapkan ada empat, yaitu  $u, \alpha, q$  dan  $\theta$ . Berikut adalah matriks output sistem :

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Model gerak longitudinal pesawat pada persamaan (4.79) – (4.82) adalah model bentuk deterministik yang mengabaikan adanya *noise* dan *disturbance*. *Noise* ataupun *disturbance* dapat terjadi karena adanya kesalahan pengukuran pada variabel model, sehingga model bentuk deterministik akan diubah menjadi model bentuk stokastik dengan mempertimbangkan adanya *noise* dan *disturbance* :

$$\dot{u} = X_u u + X_\alpha \alpha - g \cos \Theta_0 \theta + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T + \xi_1 \quad (4.85)$$

$$\dot{\alpha} = Z_u^* u + Z_w \alpha + q - \frac{g \sin \Theta_0}{u_0} \theta + Z_{\delta_e}^* \delta_e + Z_{\delta_T}^* \delta_T + \xi_2 \quad (4.86)$$

$$\dot{q} = \tilde{M}_u u + \tilde{M}_\alpha \alpha + \tilde{M}_q q - \tilde{M}_\theta \theta + \tilde{M}_{\delta_e} \delta_e + \tilde{M}_{\delta_T} \delta_T + \xi_2 \quad (4.87)$$

$$\dot{\theta} = q + \xi_3 \quad (4.88)$$

Saat LSU-05 terbang di udara, LSU-05 dapat menerima gangguan yang bersifat acak, seperti angin, udara dan cuaca. Oleh karena itu pada model gerak longitudinal di atas ditambahkan matriks  $G$  atau matriks gangguan. Pada tugas akhir ini, variabel vektor gangguan terdapat 3 macam, yaitu  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  dan  $\xi_3$ .  $\xi_1$  merupakan gangguan yang terjadi pada kecepatan pesawat dengan satuan  $\frac{m}{s}$ .  $\xi_2$  merupakan gangguan yang terjadi pada sudut yang terbentuk atau dibentuk oleh pesawat dengan satuan rad dan  $\xi_3$  merupakan gangguan yang terjadi pada kecepatan sudut yang dilakukan oleh pesawat. Berikut adalah nilai matriks  $G$  yang diberikan sebagai representasi gangguan pada pesawat :

$$G\xi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix}$$

Sehingga model sistem secara keseluruhan adalah sebagai berikut :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t) \quad (4.89)$$

$$y(t) = Cx(t) + n(t) \quad (4.90)$$

dengan :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u}' \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix}, \quad u_c = \begin{bmatrix} \delta_E \\ \delta_T \end{bmatrix} \text{ dan } \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Serta nilai matriks  $A, B$  dan  $C$  yang diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} -0,83705 & 1,7696 & -0,35236 & 0 \\ -5,9575 & -21,766 & 0,0056738 & 0,8717 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 14,891 & -47,637 & -0,015802 & -7,9269 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3,9397 \\ -0,91902 & 0 \\ 0 & 0 \\ -30,902 & -6,9048 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Sehingga sistem dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{u}' \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,83705 & 1,7696 & -0,35236 & 0 \\ -5,9575 & -21,766 & 0,0056738 & 0,8717 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 14,891 & -47,637 & -0,015802 & -7,9269 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3,9397 \\ -0,91902 & 0 \\ 0 & 0 \\ -30,902 & -6,9048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_E \\ \delta_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + n(t) \quad (4.95)$$

#### 4.4 Uji Kestabilan, Keterkontrolan dan Keteramatan Sistem

Pada sub bab ini akan dilakukan uji kestabilan, uji keterkontrolan dan uji keteramatan sistem sesuai persamaan (4.94). Jika sistem stabil, maka saat diberikan *setpoint*, keluaran sistem akan sesuai dengan *setpoint*. Jika sistem

terkontrol, maka perancangan kendali mampu diterapkan pada sistem untuk mendapatkan karakteristik respon sistem yang lebih baik. Jika sistem teramati, maka sistem dengan nilai awal dapat dibawa menuju sistem dengan nilai akhir.

#### 4.4.1 Uji Kestabilan

Kestabilan sistem akan diuji dengan mencari nilai eigen sistem. Jika semua konstanta real eigen sistem bernilai negatif, maka sistem bersifat stabil dinamik.

Selanjutnya akan dicari nilai eigen sistem dengan menggunakan persamaan berikut :

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -0,83705 & 1,7696 & -0,35236 & 0 \\ -5,9575 & -21,766 & 0,0056738 & 0,8717 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 14,891 & -47,637 & -0,015802 & -7,9269 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 0,83705 & -1,7696 & 0,35236 & 0 \\ 5,9575 & \lambda + 21,766 & -0,0056738 & -0,8717 \\ 0 & 0 & \lambda & -1,0000 \\ -14,891 & 47,637 & 0,015802 & \lambda + 7,9269 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan kofaktor, maka diperoleh penyelesaian sebagai berikut :

$$\lambda \begin{vmatrix} \lambda + 0,83705 & -1,7696 & 0 \\ 5,9575 & \lambda + 21,766 & -0,8717 \\ -14,891 & 47,637 & \lambda + 7,9269 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 0,83705 & -1,7696 & 0,35236 \\ 5,9575 & \lambda + 21,766 & -0,0056738 \\ -14,891 & 47,637 & 0,015802 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda \left[ \lambda + 0,83705 \begin{vmatrix} \lambda + 21,766 & -0,8717 \\ 47,637 & \lambda + 7,9269 \end{vmatrix} + 1,7696 \begin{vmatrix} 5,9575 & -0,8717 \\ -14,891 & \lambda + 7,9269 \end{vmatrix} \right] +$$

$$\left[ \lambda + 0,83705 \begin{vmatrix} \lambda + 21,766 & -0,0056738 \\ 47,637 & 0,015802 \end{vmatrix} + 1,7696 \begin{vmatrix} 5,9575 & -0,0056738 \\ -14,891 & 0,015802 \end{vmatrix} \right] +$$

$$0,35236 \begin{vmatrix} 5,9575 & \lambda + 21,766 \\ -14,891 & 47,637 \end{vmatrix} = 0$$



$$\begin{aligned}
& \lambda \left( ((\lambda + 0,83705)(\lambda + 21,766)(\lambda + 7,9269) - (47,637)(-0,8717)) \right) + \\
& 1,7696((5,9575)(\lambda + 7,926) - (-14,891)(-0,8717)) + (\lambda + 0,83705) \\
& ((\lambda + 21,766)(0,015802) - (47,637)(-0,0056738)) + 1,7696 \\
& ((5,9575)(0,015802) - (-14,891)(-0,0056738)) + 0,35236 \\
& ((5,9575)(47,637) - (-14,891)(\lambda + 21,766)) = 0
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan bantuan piranti lunak MATLAB, diperoleh nilai eigen sistem sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -4.94e - 001 + 8.57e - 001i$$

$$\lambda_2 = -4.94e - 001 - 8.57e - 001i$$

$$\lambda_3 = -1.48e + 001 + 1.06e + 000i$$

$$\lambda_4 = -1.48e + 001 - 1.06e + 000i$$

karena semua nilai konstanta real dari nilai eigen bernilai negatif, maka sistem bersifat stabil asimtotik. Dengan sistem bersifat stabil, maka saat sistem diberikan *set point*, sistem mampu mengikuti *set point* tersebut.

#### 4.4.2 Uji Keterkontrolan

Matriks ketekontrolan diberikan oleh persamaan berikut

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} -0,83705 & 1,7696 & -0,35236 & 0 \\ -5,9575 & -21,766 & 0,0056738 & 0,8717 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 14,891 & -47,637 & -0,015802 & -7,9269 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3,9397 \\ -0,91902 & 0 \\ 0 & 0 \\ -30,902 & -6,9048 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1,6263 & -3,2977 \\ -6,9339 & -29,4897 \\ -30,9020 & -6,9048 \\ 288,7364 & 113,3997 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -0,0203 & -46,9916 \\ 412,1278 & 760,3299 \\ 288,7364 & 113,3997 \\ -1982,2 & 456,8941 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 627,5792 & 1344,9 \\ -10697 & -15870 \\ -1982,2 & 456,8941 \\ -3924,7 & -40543 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks keterkontrolan untuk input *elevator* adalah :

$$M_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & -1,6263 & -0,0203 & 627,5792 \\ -0,91902 & -6,9339 & 412,1278 & -10697 \\ 0 & -30,9020 & 288,7364 & -1982,2 \\ -30,9020 & 288,7364 & -1982,2 & -3924,7 \end{bmatrix}$$

Sedangkan matriks keterkontrolan untuk input *throttle* adalah:

$$M_{c2} = \begin{bmatrix} 3,9397 & -3,2977 & -46,9916 & 1344,9 \\ 0 & -29,4897 & 760,3299 & -15870 \\ 0 & -6,9048 & 113,3997 & 456,8941 \\ -6,9048 & 113,3997 & 456,8941 & -40543 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan bantuan piranti lunak Matlab, maka diperoleh  $rank(M_{c1}) = rank(M_{c2}) = 4$  yang menunjukkan bahwa sistem terkontrol. Dengan sistem yang terkontrol, maka dapat diterapkan perancangan sistem kendali.

#### 4.4.3 Uji Keteramatan

Selanjutnya, matriks keteramatan diberikan oleh persamaan berikut :

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

karena pada tugas akhir ini, variabel yang diamati adalah variabel sudut *pitch*, maka nilai  $C$  adalah :

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$CA = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$CA^2 = [14,891 \quad -47,637 \quad -0,0158 \quad -7,9269]$$

$$CA^3 = [153,3 \quad 1440,8 \quad -5,392 \quad 21,2948]$$

Sehingga diperoleh matriks keteramatan untuk sudut *pitch* adalah :

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 14,891 & -47,637 & -0,0158 & -7,9269 \\ 153,3 & 1440,8 & 5,392 & 21,2948 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan bantuan piranti lunak Matlab, maka diperoleh  $rank(M_{c1}) = rank(M_{c2}) = 4$ . Nilai  $rank$  dari matriks  $M_o$  sama dengan orde sistem, sehingga sistem dapat dikontrol dan diamati. Dengan sistem yang teramati, maka gangguan yang terjadi pada keluaran sistem dapat diperkecil.

#### 4.5 Perancangan Kendali LQG

Pada sub bab ini, akan dibahas terkait perancangan kendali LQG untuk kestabilan sudut *pitch* LSU-05. LQG merupakan sebuah sistem kendali yang terdiri atas estimator sistem dan gain *feedback* sistem. Pada tugas akhir ini, sistem gerak longitudinal LSU-05 adalah sistem yang diberikan gangguan stokastik berdistribusi normal serta diberikan *noise* stokastik pada keluaran sistem. Hal ini menyebabkan sistem membutuhkan estimator, sehingga tahap pertama adalah perancangan estimator Kalman filter. Selanjutnya tahap kedua

adalah penentuan gain *feedback* regulator dan tahap ketiga adalah penentuan nilai gain integrator agar keluaran sesuai dengan *setpoint* yang ditentukan.

#### 4.5.1 Estimator Kalman Filter

Diketahui bahwa model matematika gerak longitudinal LSU-05 seperti persamaan (4.89) adalah :

$$\dot{x} = Ax + Bu + G\xi$$

dengan keluaran :

$$y = Cx + n$$

Atau dapat dilihat persamaan (4.93). Sistem di atas memiliki variabel gangguan  $G$  dan *noise* pengukuran  $n$ . Untuk mengurangi kesalahan akibat gangguan dan *noise*, maka diterapkan estimasi Kalman Filter. Diagram blok Kalman Filter dapat dilihat pada gambar 2.4. Dengan menerapkan estimator Kalman filter, maka diperoleh persamaan estimasi sistem :

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f Cx + K_f n - K_f C\hat{x} \quad (4.96)$$

dengan  $K_f$  adalah gain Kalman filter kontinu yang diperoleh dari :

$$K_f(t) = P_f C^T R_f^{-1}$$

dengan  $P_f$  merupakan penyelesaian Aljabar Riccati berikut :

$$AP_f + P_f A^T + GQ_f G^T - P_f C^T R_f^{-1} C P_f = 0$$

Pada persamaan Aljabar Riiccati di atas, matriks  $Q_f$  dan  $R_f$  adalah kovarians dari vektor  $\xi(t)$  dan  $n(t)$  yang bersifat simetri dan semidefinit positif atau definit positif. Matiks  $Q_f$  berukuran  $3 \times 3$  dan matriks  $R_f$  berukuran  $4 \times 4$  yang diperoleh berdasarkan analisa penulis.

Pada tabel Spesifikasi LSU-05 diketahui bahwa  $U_0$  bernilai  $27,28 \text{ m/s}$ , sehingga *disturbance* sistem yang terjadi diperkirakan  $0,1 \text{ m/s}$ . Satuan sudut yang terbentuk pada dan oleh LSU-05 adalah radian (rad), sehingga *disturbance* sistem yang terjadi pada sudut adalah  $0,001 \text{ rad}$  atau sekitar  $0,057^\circ$ .

Selanjutnya satuan kecepatan sudut adalah rad/s, pada gerak longitudinal pesawat nilai  $q$  pada tabel spesifikasi adalah 0,2024 rad/s atau sekitar  $\frac{11,6017^\circ}{s}$ , sehingga ditentukan untuk kecepatan sudut  $q$  adalah  $\frac{0,1^\circ}{s} = 0,00174 \frac{rad}{s}$ . Berikut adalah matriks kovarians  $Q_f$  :

$$Q_f = \begin{bmatrix} Q_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{f2} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{f3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00174 \end{bmatrix}$$

Penentuan matriks  $R_f$  bergantung pada kesalahan pengukuran. Pada kasus ini, dipilih matriks  $R_f$  sebagai berikut :

$$R_f = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan *toolbox* pada MATLAB, maka diperoleh nilai  $P_f$  sebagai berikut :

$$P_f = \begin{bmatrix} 0,0070 & -0,0009 & 0,0002 & 0,0058 \\ -0,0009 & 0,0001 & 0,0002 & -0,0001 \\ 0,0002 & 0,0002 & 0,0013 & 0,0003 \\ 0,0058 & -0,0011 & 0,0005 & 0,0097 \end{bmatrix}$$

dan

$$K_f = \begin{bmatrix} 7,0295 & -0,9999 & 0,2033 & 5,8391 \\ -0,9999 & 0,1980 & 0,0030 & -1,1321 \\ 0,2033 & 0,0030 & 1,3411 & 0,5999 \\ 5,8391 & -1,1321 & 0,5999 & 9,6963 \end{bmatrix}$$

Sesuai persamaan (2.14), estimator akan stabil jika pole  $[A - K_f C]$  bersifat stabil atau dengan kata lain nilai

eigen bagian Real adalah negatif. Selanjutnya akan diperiksa nilai eigen dari  $[A - K_f C]$ .

$$|\lambda - (A - K_f C)| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} -7,8665 & 2,7695 & -0,55567 & -5,8391 \\ -4,9576 & -21,964 & 0,0026853 & 2,0038 \\ -0,20331 & -0,0029885 & -1,3411 & 0,40011 \\ 9,0519 & -46,505 & -0,61569 & -17,623 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan bantuan MATLAB, diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \lambda_{f1} &= -21,593 \\ \lambda_{f2} &= -12,921 + 11,515 i \\ \lambda_{f3} &= -12,921 - 11,515 i \\ \lambda_{f4} &= -1,3588 \end{aligned}$$

karena seluruh nilai real eigen dari  $[A - K_f C]$  bernilai negatif, maka estimator kalman filter yang digunakan bersifat stabil.

#### 4.5.2 Gain Regulator

Selanjutnya akan diselidiki Gain Regulator LQG dengan karakteristik stabil pada lup tertutup. Nilai gain regulator kendali LQG diperoleh dengan cara yang sama pada pencarian nilai gain kendali LQR.

Hukum kendali dari sebuah sistem dapat dituliskan sebagai berikut :

$$u_c = -K_c \hat{x}$$

dengan  $K_c$  adalah nilai gain *feedback* regulator yang diperoleh dari :

$$K_c = R_c^{-1} B^T P_c$$

dengan  $P_c$  merupakan penyelesaian Aljabar Riccati :

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c = 0$$

Pada penyelesaian Aljabar Riccati di atas, dibutuhkan nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  terlebih dahulu.  $Q_c$  merupakan matriks bobot variabel sistem yang bersifat simetri dan semi definit positif.  $R_c$  merupakan matriks bobot nilai masukkan sistem yang bersifat simetri dan definit positif. Nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  diperoleh dengan cara *trial and error*. Semakin kecil nilai  $R_c$  dan semakin besar nilai  $Q_c$ , maka nilai gain  $K_c$  semakin besar.

Berikut adalah tahap tahap yang dilakukan dalam penentuan gain  $K_c$  :

1. Menentukan nilai  $R_c$  dan  $Q_c$ .
2. Dipilih nilai  $R_c$  terlebih dahulu dan penentuan  $Q_c$ .
3. Mencari nilai  $P_f$  dengan *toolbox* MATLAB.
4. Mencari nilai gain  $K_f$
5. Simulasi sistem dengan simulink MATLAB.
6. Analisa karakteristik hingggs diperoleh sistem yang optimal, yaitu waktu stabil tercepat dan *overshoot* terpendek.

Dari hasil *trial and error*, diperoleh nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  yang membuat sistem yang optimal adalah sebagai berikut :

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh nilai  $P_c$  :

$$P_c = \begin{bmatrix} 0,0032 & -0,0031 & 0,0031 & 0,0001 \\ -0,0031 & 0,0232 & -0,0128 & -0,0007 \\ 0,0031 & -0,0128 & 10,1094 & 0,0104 \\ 0,0001 & -0,0007 & 0,0104 & 0,0010 \end{bmatrix}$$

serta diperoleh nilai  $K_c$  :

$$K_c = \begin{bmatrix} -2,9174 & 2,0064 & -310,4954 & -31,0297 \\ 11,3203 & -6,8528 & -59,9163 & -6,3576 \end{bmatrix}$$

Sesuai persamaan (2.25), kendali LQG dapat diterapkan pada sistem jika pole  $\begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix}$  bersifat stabil.

$$\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -45,4 & 28,8 & 235,7 & 25 & 44,6 & -27 & -236 & -25,05 \\ -8,6 & -19,9 & -285,3 & -27,6 & 2,7 & -1,8 & 285,35 & 28,52 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,9 & -32,9 & -10009 & -1010,7 & 11,99 & -14,7 & 10009 & 1002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7,87 & 2,77 & -0,556 & -5,839 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4,96 & -21,96 & 0,003 & 2,0038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & -0,003 & -1,341 & 0,4001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9,05 & -46,5 & -0,616 & -17,62 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan bantuan MATLAB, diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \lambda_{c1} &= -1001,7 \\ \lambda_{c2} &= -32,184 + 8,329i \\ \lambda_{c3} &= -32,184 - 8,329i \\ \lambda_{c4} &= -9,9927 \\ \lambda_{c5} &= -21,593 \\ \lambda_{c6} &= -12,921 + 11,515i \\ \lambda_{c7} &= -12,921 - 11,515i \\ \lambda_{c8} &= -1,3588 \end{aligned}$$

karena seluruh nilai real eigen dari  $\begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix}$  bernilai negatif, maka LQG dapat diterapkan pada model gerak longitudinal LSU-05.



### 4.5.3 Gain Integrator

Gain integrator bermanfaat untuk mengurangi error keluaran agar mampu sesuai dengan *setpoint* :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \hat{x}(t) - r(t) \quad (4.97)$$

dimana :

$\varepsilon$  = selisih variabel dan *setpoint*

$r$  = nilai *reference* atau *setpoint*

karena pada Tugas Akhir ini bertujuan untuk menstabilkan gerak *pitch*, maka keluaran dan *setpoint* berupa sudut (satuan radian), sehingga :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \hat{\theta}(t) - r(t) \quad (4.98)$$

Untuk memperoleh nilai  $\varepsilon$  maka  $\dot{\varepsilon}$  harus dikalikan dengan integrator, sehingga kendali  $u_c$  menjadi :

$$u_c = -K_c \hat{x} + K_i \varepsilon \quad (4.99)$$

Nilai  $K_i$  diperoleh dengan metode *trial and error* dan diperoleh nilai  $K_i$  yang mampu memberikan respon terbaik adalah sebagai berikut :

$$K_i = \begin{bmatrix} 1500 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Kemudian persamaan (4.89) dan (4.94) menjadi :

$$\dot{x} = Ax - BK_c \hat{x} + BK_i \varepsilon + G\xi \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BK_c \hat{x} + BK_c x - BK_c x + BK_i \varepsilon + G\xi \\ &= Ax - BK_c x + BK_c (x - \hat{x}) + BK_i \varepsilon + G\xi \\ &= Ax - BK_c x + BK_c e + BK_i \varepsilon + G\xi \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} - K_f C\hat{x} - BK_c \hat{x} + BK_i \varepsilon + K_f Cx + K_f n \quad (4.102)$$

Selanjutnya dengan persamaan (4.101) dan (4.102)

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \hat{\dot{x}} \\ &= Ax - BK_c \hat{x} + BK_i \varepsilon + G\xi - A\hat{x} + K_f C\hat{x} + BK_c \hat{x} - BK_i \varepsilon - K_f Cx - K_f n \\ &= A(x - \hat{x}) - BK_c \hat{x} + BK_c \hat{x} + BK_i \varepsilon - BK_i \varepsilon + G\xi - K_f Cx + K_f C\hat{x} - K_f n \end{aligned}$$

$$= Ae - K_f Ce + G\xi - K_f n \quad (4.103)$$

dan persamaan (4.96) menjadi :

$$\dot{\varepsilon} = \hat{\theta} - r = \hat{\theta} + \theta - \theta - r = -e_\theta + \theta - r \quad (4.104)$$

Selanjutnya persamaan (4.101), (4.103) dan (4.104) dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c & BK_i \\ 0 & A - K_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ G & -K_f & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ n \\ r \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Dari persamaan (4.105), jika pole  $\begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c & BK_i \\ 0 & A - K_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  bersifat stabil, maka kendali LQG dengan aksi integral dapat diterapkan pada model gerak longitudinal LSU-05.

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right] - \begin{bmatrix} -45,4 & 28,77 & 235,7 & 25,05 & 44,6 & -27 & -236 & -25,04 & 393,97 \\ -8,64 & -19,92 & -285,3 & -27,65 & 2,68 & -1,844 & 285,3 & 28,52 & -1378,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,9 & -32,95 & 10009 & -1010,7 & 11,99 & -14,68 & 10009 & 1002,8 & -47043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7,87 & 2,77 & -0,556 & -5,84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4,96 & -21,96 & 0,0027 & 2,004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,203 & -0,003 & -1,341 & 0,4001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9,05 & -46,505 & -0,616 & -17,623 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan bantuan MATLAB, diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_{i1} = -1001.7$$

$$\lambda_{i2} = -32.184 + 8.3415i$$

$$\lambda_{i3} = -32.184 - 8.34159i$$

$$\lambda_{i4} = -4,964 + 4,7392i$$

$$\lambda_{i5} = -4,964 - 4,7392i$$

$$\lambda_{i6} = -21.593$$

$$\lambda_{i7} = -12.921 + 11.515i$$

$$\lambda_{i8} = -12.921 - 11.515i$$

$$\lambda_{i9} = -1.3588$$

Karena seluruh nilai real eigen dari

$$\begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c & BK_i \\ 0 & A - K_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bernilai negatif, maka LQG dengan aksi integral dapat diterapkan pada model gerak longitudinal LSU-05.

#### 4.6 Simulasi dengan Simulink MATLAB

Simulasi sistem dilakukan dengan tujuan untuk mengamati karakteristik respon sistem. Dalam melakukan simulasi, karakteristik respon sistem utama yang akan diamati adalah waktu sistem mencapai kondisi stabil ( $t_s$ ) sesuai *setpoint* dan *overshoot* ( $o_s$ ) yaitu *error* antara keluaran sistem dengan *setpoint* yang dilakukan. Berdasarkan persamaan yang telah diperoleh pada persamaan (4.97), (4.99) dan (4.96), maka model ruang keadaan gerak longitudinal LSU-05 dapat diubah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \hat{\hat{x}}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_c & BK_i \\ A - BK_c - K_f C & K_f C & BK_i \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{\hat{x}}(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & K_f & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ n(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

dengan nilai gain :

$$K_f = \begin{bmatrix} 7,0295 & -0,9999 & 0,2033 & 5,8391 \\ -0,9999 & 0,1980 & 0,0030 & -1,1321 \\ 0,2033 & 0,0030 & 1,3411 & 0,5999 \\ 5,8391 & -1,1321 & 0,5999 & 9,6963 \end{bmatrix}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} -2,9174 & 2,0064 & -310,4954 & -31,0297 \\ 11,3203 & -6,8528 & -59,9163 & -6,3576 \end{bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 1500 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{\hat{u}} \\ \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{q}} \\ \dot{\hat{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,837 & 1,77 & -0,352 & 0 & -44,6 & 27 & 236,05 & 25,047 & 393,97 \\ -5,958 & -21,8 & 0,0057 & 0,8717 & -2,68 & 1,844 & -285,35 & -28,52 & -1378,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14,89 & -47,6 & -0,016 & -7,927 & -11,99 & 14,68 & -10009 & -1002,8 & -47043 \\ -52,47 & 29,768 & 235,5 & 19,208 & 7,0295 & -0,999 & 0,2033 & 5,839 & 393,97 \\ -7,64 & -20,12 & -285,35 & -26,51 & -0,999 & 0,198 & 0,003 & -1,132 & -1378,5 \\ -0,203 & -0,003 & -1,341 & 0,4001 & 0,2033 & 0,003 & 1,341 & 0,599 & 0 \\ -2,937 & -31,82 & -10009 & 1020,4 & 5,839 & -1,132 & 0,599 & 9,6963 & -47043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ \theta \\ q \\ \hat{u} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \\ \hat{q} \\ \hat{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,0295 & -0,999 & 0,2033 & 5,8391 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,999 & 0,198 & 0,003 & -1,132 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2033 & 0,003 & 1,3411 & 0,5999 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,8391 & -1,132 & 0,5999 & 9,6963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ r \end{bmatrix}$$

(4.106)

Pada tugas akhir ini, simulasi dilakukan untuk mengetahui kestabilan gerak *pitch* yang dilakukan oleh LSU-05. Kondisi awal simulasi adalah pesawat yang terbang dengan *wing level*, yaitu terbang lurus tanpa membuat sudut kemiringan, baik sudut *roll*, *pitch* maupun *yaw*. Kemudian LSU-05 akan melakukan gerakan *pitch up* sebesar 0,2 rad atau sekitar 11,465°. Nilai tersebut merupakan nilai yang dimasukkan dari defleksi elevator ( $\delta_e$ ) atau dengan kata lain *setpoint* yang ditentukan dalam simulasi adalah 0,2 rad. Jadi dapat dikatakan bahwa pada simulasi ini, kondisi awal sudut *pitch* ( $\theta_0$ )

adalah 0,2 rad dan kondisi akhir sudut *pitch* ( $\theta_f$ ) adalah 0,2 rad.

#### 4.6.1 Representasi Diagram Blok Sistem Awal

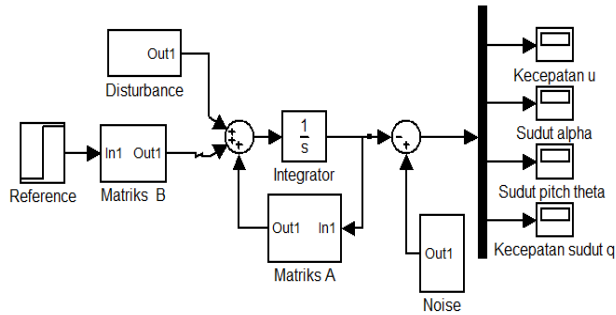
Pada tahap pertama ini, akan dilakukan simulasi sistem tanpa adanya perancangan kendali. Adapun sistem yang akan disimulasikan adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t) \\ y(t) &= Cx(t) + n(t)\end{aligned}$$

Atau persamaan (4.94) dan (4.95) :

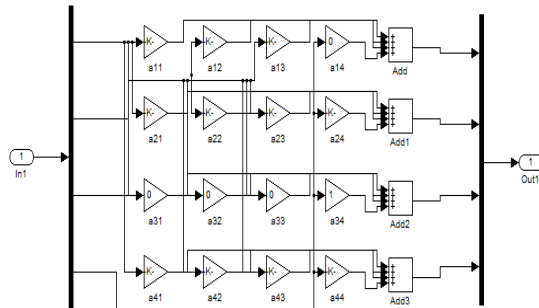
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{u}' \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,83705 & 1,7696 & -0,35236 & 0 \\ -5,9575 & -21,766 & 0,0056738 & 0,8717 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 14,891 & -47,637 & -0,015802 & -7,9269 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & 3,9397 \\ -0,91902 & 0 \\ 0 & 0 \\ -30,902 & -6,9048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_E \\ \delta_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + n(t)\end{aligned}$$

Pada simulasi ini juga diikutsertakan *setpoint* yang merupakan target pesawat untuk melakukan gerak *pitch*, yaitu sebesar 0,2 rad. Representasi diagram blok Simulink dari persamaan di atas adalah :



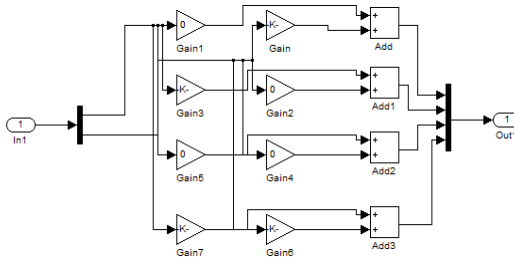
**Gambar 4.4 Diagram Blok Simulink Sistem Awal**

dengan representasi Simulink matriks  $A$  adalah :



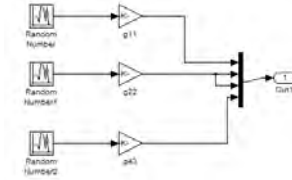
**Gambar 4.5 Representasi simulink matriks  $A$**

representasi Simulink matriks  $B$  adalah :



**Gambar 4.6 Representasi Simulink matriks  $B$**

serta representasi simulink matriks  $G$  adalah :



**Gambar 4.7 Representasi Simulink untuk Gangguan Berdistribusi Normal**

Pada gambar 4.4 terdapat blok integrator  $\frac{1}{s}$  yang

berfungsi untuk mengintegralkan variabel  $\dot{x}$  menjadi  $x$ . Dimana pada sistem ini variabel :  $\dot{u}$  diintegralkan menjadi  $u$ ,  $\dot{\alpha}$  diintegralkan menjadi  $\alpha$ ,  $\dot{\theta}$  diintegralkan menjadi  $\theta$  dan  $\dot{q}$  diintegralkan menjadi  $q$ .

Matriks  $C$  merupakan matriks keluaran dimana nilai

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

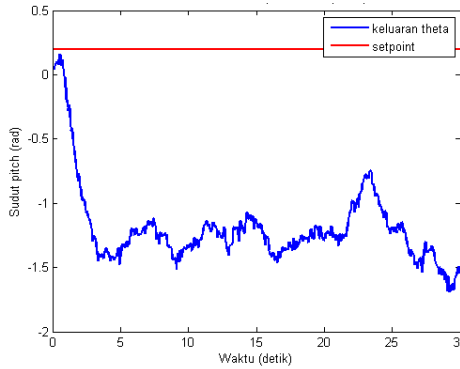
dengan

$$y(t) = Cx(t) + n(t) \text{ atau}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \alpha(t) \\ \theta(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \end{bmatrix}$$

maka dapat ditulis bahwa  $y(t) = Cx(t) + n(t)$ , sehingga pada Simulink, matriks  $C$  tidak direpresentasikan secara khusus.

Hasil simulasi keluaran sudut *pitch* ( $\theta$ ) pada sistem persamaan (4.104) adalah sebagai berikut :



**Gambar 4.8 Hasil Keluaran  $\theta$  pada Sistem Awal**

Hasil simulasi pada gambar 4.8 menunjukkan bahwa saat terjadi gangguan dan kesalahan *noise* pengukuran pada sistem, maka keluaran sistem bersifat tidak stabil. LSU-05 tidak melakukan gerak *pitch up* sebesar 0,2 rad, akan tetapi melakukan gerak *pitch down* sebesar -1,5 rad serta bergerak tidak beraturan. Simulasi di atas dilakukan dengan  $t_0 = 0$  hingga  $t_f = 30$  detik. Akan tetapi, karena sistem bersifat tidak stabil dan efek dari gangguan terlalu besar, maka pengamatan karakteristik respon tidak dapat dilakukan.

#### 4.6.2 Representasi Diagram Blok Sistem Awal dengan Estimator Kalman Filter

Pada tahap kedua ini, akan dilakukan perancangan estimator Kalman Filter yang bertujuan untuk mengurangi kesalahan akibat adanya gangguan dan kesalahan *noise* keluaran.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_c(t) + G\xi(t)$$

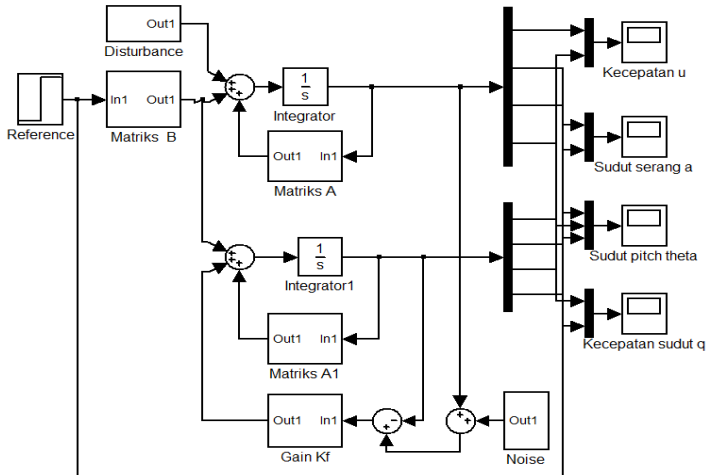
$$y(t) = Cx(t) + n(t)$$

$$\hat{\hat{x}}(t) = A\hat{\hat{x}}(t) + Bu_c(t) + K_f Cx(t) + K_f n(t) - K_f C\hat{\hat{x}}$$



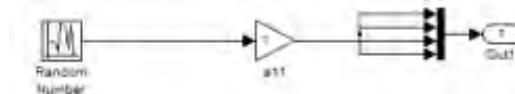
Pada simulasi ini juga diikutsertakan *setpoint* yang merupakan target pesawat untuk melakukan gerak *pitch*, yaitu sebesar 0,2 rad.

Representasi diagram blok Simulink dari persamaan (4.105) adalah :



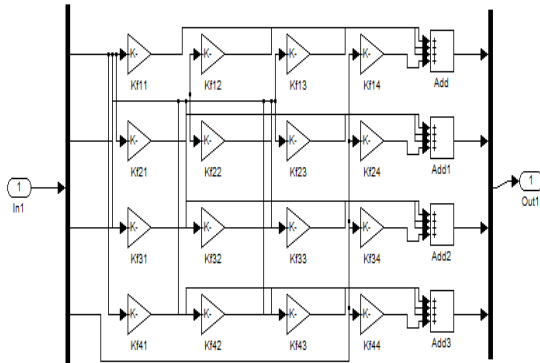
**Gambar 4.9 Diagram Blok Simulink Sistem dengan Estimator Kalman Filter**

dimana representasi Simulink *noise n* adalah :



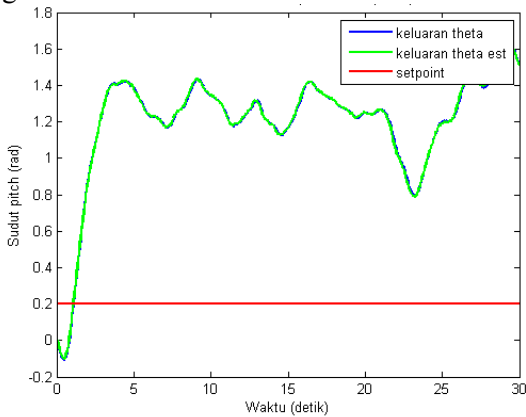
**Gambar 4.10 Representasi Simulink untuk *Noise* Berdistribusi Normal**

serta representasi Simulink matriks gain  $K_f$  adalah :



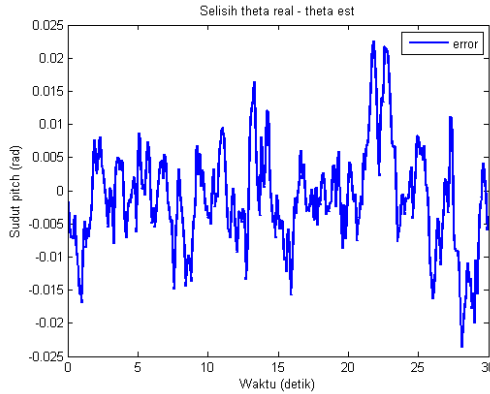
**Gambar 4.11 Representasi Simulink untuk Gain  $K_f$**

Hasil simulasi keluaran sudut *pitch* ( $\theta$ ), sudut *pitch* estimasi ( $\hat{\theta}$ ) pada sistem persamaan (4.105) adalah sebagai berikut :



**Gambar 4. 12 Hasil Keluaran  $\theta$  pada Sistem dengan Estimator Kalman Filter**

dengan grafik  $error\ e = \theta - \hat{\theta}$  adalah :



**Gambar 4.13 Error Kalman Fiter**

Simulasi di atas dilakukan dengan  $t_0 = 0$  hingga  $t_f = 30$  detik. Hasil simulasi pada gambar 4.12 menunjukkan bahwa keluaran  $\theta$  yang telah diestimasi mengalami perubahan hasil, yaitu menuju ke *setpoint*. Akan tetapi hasil pada gambar 4.12 belum menunjukkan hasil yang stabil, sehingga tidak dapat dilakukan pengamatan karakteristik respon keluaran. Gambar 4.13 menunjukkan selisih besar sudut *pitch* sebelum dan sesudah diestimasi. Pada gambar tersebut, dapat dilihat bahwa besar *error* sekitar  $-0,023 \text{ rad} \leq \text{error} \leq 0,023 \text{ rad}$ .

#### 4.6.3 Representasi Sistem dengan Gain $K_c$

Setelah dilakukan simulasi dengan estimasi Kalman Filter, maka selanjutnya sismulasi akan dilakukan dengan penambahan Gain  $K_c$  yang merupakan gain *feedback* regulator.

Hukum kendali diberikan sebagai berikut :

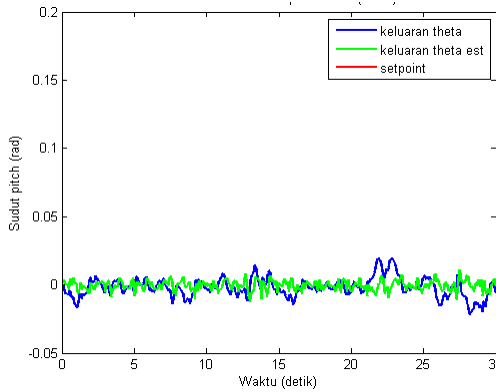
$$u_c = -K_c \hat{x}$$

sehingga diperoleh persamaan sistem :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK_c \hat{x}(t) + G\xi(t)$$

$$\hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) - BK_c \hat{x}(t) + K_f Cx(t) + K_f n(t) - K_f C\hat{x}(t)$$





**Gambar 4.16 Hasil Keluaran  $\theta$  pada Sistem dengan Kendali LQG**

Simulasi di atas dilakukan dengan  $t_0 = 0$  hingga  $t_f = 30$  detik. Hasil simulasi pada gambar 4.16 merupakan hasil simulasi sistem dengan mengikutsertakan gain  $K_f$  dan  $K_c$ . Pada hasil simulasi di atas dapat diamati bahwa sudut *pitch* stabil di posisi 0 rad. Akan tetapi, *setpoint* yang ditentukan adalah 0,2 rad. Hal ini menyebabkan sistem membutuhkan perancangan ulang yang mampu membuat sistem sesuai dengan *setpoint*. Oleh karena itu, ditambahkan gain kendali integrator agar keluaran sistem sesuai dengan *setpoint* yang telah ditentukan.

#### 4.6.4 Representasi Sistem dengan Gain $K_i$

Pada tahap ini, akan ditambahkan variabel  $\varepsilon$  yang merupakan selisih antara keluaran  $\hat{\theta}$  dan *setpoint* ( $r$ ). Selanjutnya akan ditambahkan gain integrator untuk membuat keluaran sistem sesuai dengan *setpoint*.

$$\varepsilon(t) = \hat{\theta}(t) - r(t)$$

dengan menambahkan variabel  $\varepsilon$ , maka hukum kendali sistem menjadi :

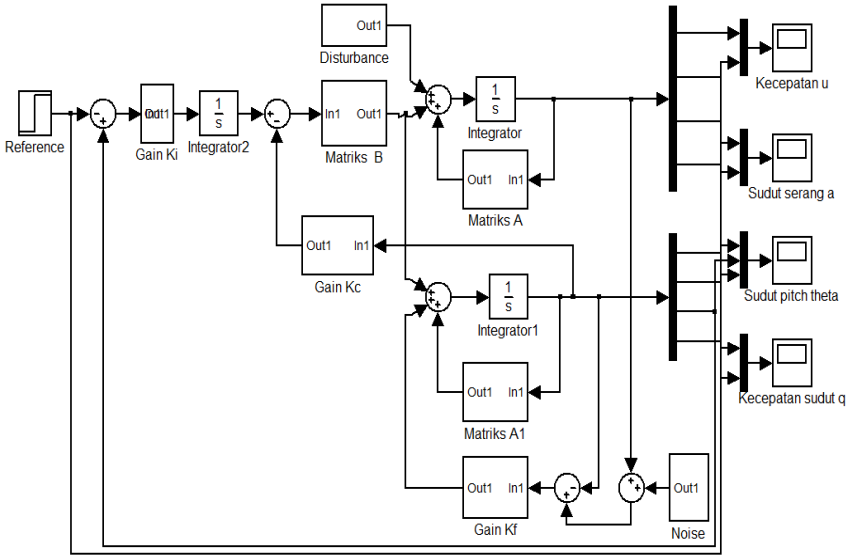
$$u_c(t) = -K_c \hat{x}(t) + K_i \varepsilon(t)$$

Sehingga persamaan (4.106) menjadi :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK_c \hat{x}(t) + BK_i \varepsilon(t) + G\xi(t)$$

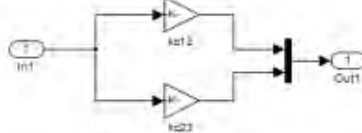
$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}}(t) &= A\hat{x}(t) - BK_c\hat{x}(t) + BK_i\varepsilon(t) + K_fCx(t) + K_f n(t) - \\ &\quad K_f C\hat{x}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + n(t)\end{aligned}\quad (4.107)$$

Berikut adalah representasi diagram blok Simulink MATLAB persamaan sistem (4.107) :



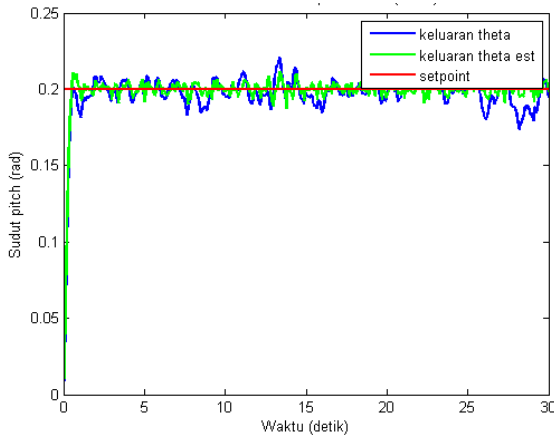
**Gambar 4.17 Diagram Blok Simulink Kendali LQG dengan Gain Integrator  $K_i$**

dengan representasi gain  $K_i$  :



**Gambar 4.18 Representasi Simulink untuk Gain  $K_i$**

Simulasi di atas dilakukan dengan  $t_0 = 0$  hingga  $t_f = 30$  detik. Hasil simulasi keluaran sudut *pitch* ( $\theta$ ) pada sistem persamaan (4.107) adalah sebagai berikut :



**Gambar 4.19 Hasil Keluaran  $\theta$  dengan Kendali LQG dan Gain Integrator**

Hasil simulasi pada gambar 4.19 merupakan hasil simulasi sistem dengan mengikutsertakan gain  $K_f$ , gain  $K_c$  dan gain  $K_i$ . Pada hasil simulasi di atas dapat diamati bahwa sudut *pitch* stabil sesuai dengan *setpoint* yaitu 0,2 rad. Akibat dari memasukkan gangguan dan kesalahan *noise* pengukuran yang bersifat stokastik, maka hasil simulasi menunjukkan bahwa kestabilan sistem tidak stabil sempurna. Akan tetapi konvergen atau gerak *pitch* berada pada daerah sekitar *setpoint*.

Selanjutnya akan dilakukan analisa karakteristik respon sistem. Analisis karakteristik respon dilakukan dengan mengamati hasil simulasi pada gambar 4.19. Pada gambar 4.19, sistem dikatakan stabil jika, sistem berada dan bergerak sesuai *setpoint*. Waktu stabil sistem dihitung saat sistem pertama kali berada pada 0,18 rad dan tidak bergerak melewati  $\pm 0,02$  rad dari *setpoint*. Sehingga diperoleh waktu stabil untuk  $\theta$  adalah 0,435 s dan untuk  $\hat{\theta}$  adalah 0,4 s.

Selanjutnya diamati *overshoot* maksimum atau lewatan sistem dari *setpoint* yang telah ditentukan. Pada hasil simulasi di gambar 4.19 dapat dilihat bahwa sistem mencapai kondisi maksimum sebesar 0,22 rad atau sebesar 10% dari *setpoint*

untuk variabel  $\theta$  pada wakt 13 s dan sebesar 0,21 rad atau sebesar 5% untuk variabel  $\hat{\theta}$  pada waktu 13 s. Berikut adalah karakteristik respon sistem yang diperoleh :

**Tabel 4.1 Karakteristik Respon Sistem**

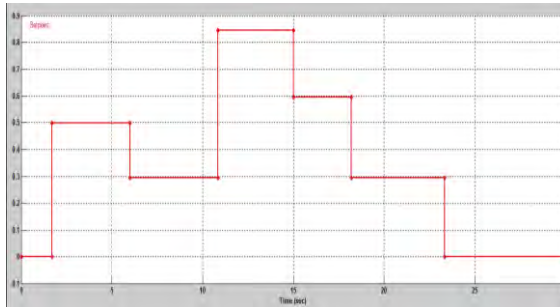
No	Respon Sistem	$\theta$	$\hat{\theta}$
1	$t_d$	0,1 s	0,108 s
2	$t_r$	0,435 s	0,4 s
3	$t_s$	0,435 s	0,4 s
4	$m_p$	0,22 rad	0,21rad
5	$t_p$	13 s	13 s
6	$o_s$	10%	5%

#### 4.6.5 Representasi Uji *Tracking* Pada Sistem

Setelah diperoleh hasil simulasi yang membuat sistem stabil, maka pada tahap ini dilakukan simulasi uji *tracking* untuk gerak *pitch* LSU-05. Pada tahap ini, nilai *setpoint* sudut *pitch* akan diubah ubah berdasarkan waktu tertentu. Dalam dunia nyata, LSU-05 pasti akan melakukan gerak *pitch down* (mengangguk ke bawah) atau melakukan gerak *pitch up* (mendongak ke atas) saat terbang di udara. Gerakan tersebut dapat dilakukan saat LSU-05 mengalami daerah tanjakan (melewati gunung dan gedung tinggi) ataupun saat LSU-05 harus melewati awan serta akan melakukan pendaratan.

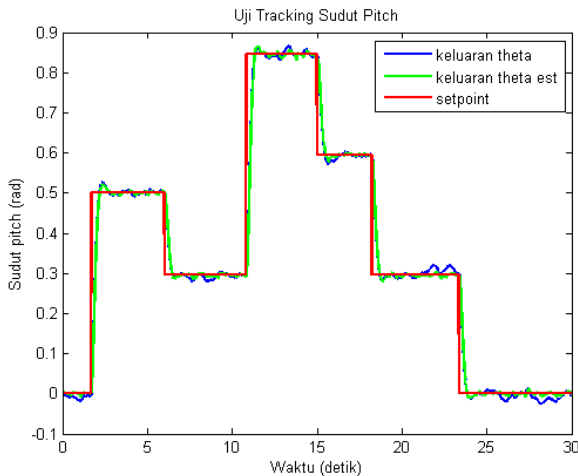
Pada saat simulasi dengan Simulink MATLAB, penyusunan diagram blok sama seperti dengan gambar 4.17. Akan tetapi *setpoint* disusun dengan menggunakan blok *Signal Builder*. Berikut adalah penyusunan *setpoint* untuk uji *tracking* gerak *pitch* LSU-05 :





**Gambar 4.20 Setpoint untuk Uji Tracking**

Berikut adalah hasil simulasi uji *tracking* sistem :



**Gambar 4.21 Hasil Simulasi Uji Tracking Sudut Pitch**

Pada hasil simulasi gambar 4.21 dapat ditunjukkan bahwa keluaran sudut  $\theta$  dan  $\hat{\theta}$  bergerak mengikuti *set point* yang telah ditentukan. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan kendali LQG dengan aksi integral memberikan hasil yang stabil dan mampu diterapkan untuk kestabilan gerak *pitch* LSU-05.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN 1

### List Program Kestabilan, Keterkontrolan dan Keteramatan Sistem

```
%Matriks A, B, C(pitch)
a=[-0.83705 1.7696 -0.35236 0; -5.9575 -
21.766 0.0056738 0.8717;0 0 0 1;14.891 -
47.637 -0.015802 -7.9269];
b=[0 3.9397;-0.91902 0;0 0;-30.902 -6.9048];
cp=[0 0 1 0]

%Cek kestabilan
eig(a)

%Cek keterkontrolan
b1=a*b
b2=(a^2)*b
b3=(a^3)*b
Mc1=[b(:,1) b1(:,1) b2(:,1) b3(:,1)]
Mc1r=rank(Mc)
Mc2=[b(:,2) b1(:,2) b2(:,2) b3(:,2)]
Mc2r=rank(Mc)

%Cek keteramatan
c1=cp*a
c2=cp*(a^2)
c3=cp*(a^3)
Mo=[cp;c1;c2;c3]
Mo1=rank(Mo)
```

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN 2

### List Program Kestabilan Sistem dengan Kendali

```
A=[-0.83705 1.7696 -0.35236 0; -5.9575 -21.766  
0.0056738 0.8717;0 0 0 1;14.891 -47.637 -  
0.015802 -7.9269];  
B=[0 3.9397;-0.91902 0;0 0;-30.902 -6.9048];  
G=[1 0 0;0 1 0;0 1 0;0 0 1];  
C=eye(4);  
  
%Nilai Rf dan Qf  
Rf=[0.001 0 0 0; 0 0.001 0 0;0 0 0.001 0;0 0 0  
0.001];  
Qf=[0.1 0 0;0 0.001 0;0 0 0.00174];  
%Aljabar Riccati Pf  
Pf=are(A',C'*inv(Rf)*C,G*Qf*G')  
%Gain Kf  
Kf=Pf*C'*inv(Rf)  
%Kestabilan Estimator Kalman Filter  
stabilKf=a-(Kf*c)  
eig(stabilKf)  
  
%Nilai Rc dan Qc (trial and error)  
rc=[0.001 0;0 0.001];  
qc=[0.1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 100 0;0 0 0 1];  
%Aljabar Riccati Pc  
Pc=are(a,b*inv(rc)*b',qc);  
%Gain Kc  
Kc=inv(rc)*b'*Pc;  
  
%Kestabilan LQG  
a11=A-(B*Kc)  
a12=B*Kc  
a21=zeros(4)  
a22=A-(Kf*C)  
LQG=[a11 a12;a21 a22]  
eig(LQG)  
  
%Gain Ki  
Ki=[1500;100]
```

```

%Kestabilan LQG Aksi Integral
ak11=A-(B*Kc)
ak12=B*Kc
ak13=B*Ki
ak21=zeros(4)
ak22=A-(Kf*C)
ak23=[0;0;0;0]
ak31=[0 0 -1 0]
ak32=[0 0 1 0]
ak33=[0]

Ak=[ak11 ak12 ak13;ak21 ak22 ak23; 0 0 1 0 0 0
-1 0 0]
eig(Ak)

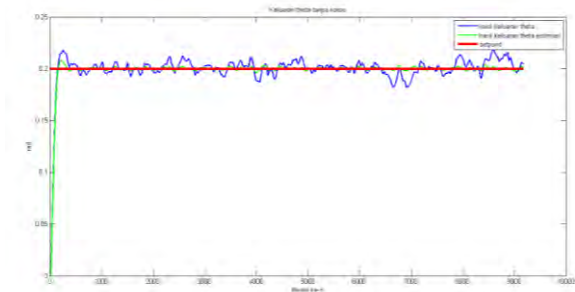
```

### LAMPIRAN 3

#### Simulasi Sistem tanpa *Noise* dan *Disturbance*

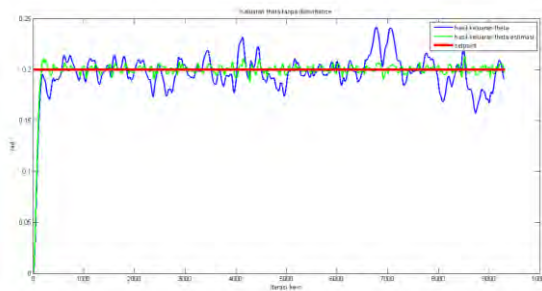
Pada lampiran ini ditampilkan hasil simulasi dengan kondisi yang berbeda pada bab IV, antara lain :

##### 1. Simulasi tanpa *noise* stokastik



Gambar di atas merupakan simulasi sistem tanpa mengikutsertakan *noise* keluaran. Hasil yang ditunjukkan adalah sistem stabil di sekitar *setpoint*.

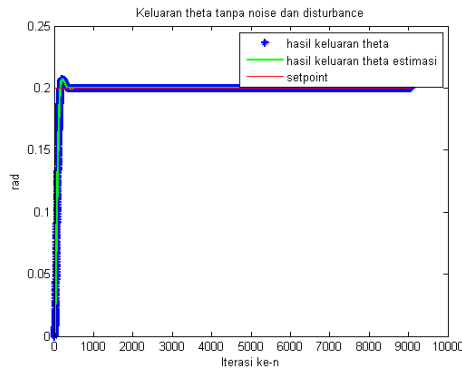
##### 2. Simulasi tanpa *disturbance*



Gambar di atas merupakan simulasi sistem tanpa mengikutsertakan *disturbance* keluaran. Hasil yang ditunjukkan adalah sistem stabil di sekitar *setpoint* dengan efek gangguan yang sangat besar pada keluaran  $\theta$ . Jika dibandingkan dengan gambar selanjutnya, dapat disimpulkan

bahwa efek gangguan dari *noise* keluaran jauh lebih besar daripada efek dari *disturbance*.

### 3. Simulasi tanpa *noise* dan *disturbance*



Gambar di atas merupakan simulasi sistem tanpa mengikutsertakan *disturbance* dan *noise* keluaran. Hasil yang ditunjukkan adalah sistem stabil di sekitar *setpoint* tanpa adanya gangguan.

Dengan adanya ketiga kondisi simulasi di atas, dapat disimpulkan bahwa tanpa adanya gangguan (*disturbance*) serta *noise* pengeluaran, sistem bersifat stabil sempurna dan sesuai dengan *setpoint*.



## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model sistem gerak longitudinal LSU-05 bersifat stabil sehingga dapat mengikuti *setpoint* yang telah ditentukan, bersifat terkontrol sehingga dapat diterapkan sistem kendali untuk mendapatkan respon yang lebih baik dan bersifat teramati sehingga dapat diterapkan estimator pada sistem untuk mengurangi kesalahan keluaran akibat *disturbance* dan *noise*.
2. Perancangan kendali LQG dengan aksi integral yang telah diterapkan memiliki nilai gain sebagai berikut :

$$K_f = \begin{bmatrix} 7,0295 & -0,9999 & 0,2033 & 5,8391 \\ -0,9999 & 0,1980 & 0,0030 & -1,1321 \\ 0,2033 & 0,0030 & 1,3411 & 0,5999 \\ 5,8391 & -1,1321 & 0,5999 & 9,6963 \end{bmatrix}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} -2,9174 & 2,0064 & -310,4954 & -31,0297 \\ 11,3203 & -6,8528 & -59,9163 & -6,3576 \end{bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 1500 \\ 100 \end{bmatrix}$$

3. Parameter respon sistem yang didapatkan antara lain

No	Respon	$\theta$	$\hat{\theta}$
1	$t_d$	0,1 s	0,108 s
2	$t_r$	0,435 s	0,4 s
3	$t_s$	0,435 s	0,4 s
4	$m_p$	0,22 rad	0,21rad
5	$t_p$	13 s	13 s
6	$o_s$	5%	10%

4. Berdasarkan simulasi step dan uji *tracking* yang telah dilakukan, keluaran sudut *pitch* selalu mengikuti *set point* yang ditentukan, sehingga kendali LQG dapat diterapkan untuk LSU-05.

## 5.2 Saran

Saran penulis untuk perbaikan tugas akhir ini sekaligus pengembangan penelitian selanjutnya adalah :

1. Matriks  $Q_c$  dan  $R_c$  dicari dengan algoritma genetika untuk hasil yang lebih optimal dan waktu pencarian yang lebih cepat
2. Kendali LQG aksi integral dapat diujicobakan untuk navigasi LSU-05
3. Pemanfaatan kendali robust dan kendali adaptif untuk mendapatkan karakteristik sistem yang lebih baik lagi.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonim. LAPAN Luncurkan Varian Baru UAV Seri LSU – 05. <http://jakartagreater.com/lapan-luncurkan-varian-baru-uav-seri-lsu-05/>. Diakses pada tanggal 01 Desember 2015 pukul 12.44 WIB.
- [2] Purnawan, Heri. 2015. Desain Sistem Kendali Linear Quadratic Regulator (LQR) Untuk Kestabilan Terbang LSU-05. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS : Surabaya.
- [3] Muzaki, Anas Fikri. 2014. Pemodelan Gerak Lateral-Direksional dan Analisis Kestabilan Dinamik LSU-05. Laporan Kerja Praktek. Jurusan Matematika ITS : Surabaya.
- [4] Subiono. 2013. Sistem Linear dan Kontrol Optimal. Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember : Surabaya.
- [5] Siouris, George M. 1996. *An Engineering Approach To Optimal Control and Estimation Theory*. ISBN 0-471-12126-6.
- [6] Lewis, Frank L. 1986. *Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory*. Scholl of Electrical Engineering, Georgia Institute of Technology Atlanta : Georgia.
- [7] Purwanto, Eko Budi. 2015. *Identification and Flight Stability Analysis of LSU-05 to Servo Deflection of Surface Control System*. International Seminar on Aerospace Science and Technology. LAPAN.
- [8] Ogata, Katsuhiko. 2010. *Modern Control Engineering Fifth Edition*. Pretince Hall.
- [9] Durham, Wayne. 2013. *Aircraft Flight Dynamics and Control*. Wiley : Virginia Polytechnic Institute and State University, USA.
- [10] McLean, Donald. 1990. *Automatic Flight Control System*. Pretince Hall : University of Southampton, UK.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BIODATA PENULIS



**Shaffiani Nurul Fajar** atau yang biasa dipanggil Shaffi lahir pada tanggal 08 Mei 1994. Penulis telah menempuh pendidikan di TK PGRI 03 Batu, SDN Sisir 02 Batu, SMPI Asy-Syafi'iyah 06 Bekasi dan SMAN 61 Jakarta. Pada tahun 2012-2016, penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika, FMIPA ITS.

Di jurusan Matematika, penulis mengambil rumpun Matematika Terapan, khususnya Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem. Penulis adalah penerima manfaat Beastudi Etos Surabaya periode 2012-2016. Selama kuliah S-1, penulis pernah aktif di Departemen Sainstek HIMATIKA ITS, Klub Keilmiahan ITS, LDJ Ibnu Muqhlah ITS dan Trainer Keilmiahan Accelerator. Penulis juga pernah memiliki pengalaman menjadi Asisten Dosen mata kuliah kalkulus dan WKTJ serta pengalaman dalam melakukan Kerja Praktek di Pustekbang LAPAN Indonesia.

Motto penulis adalah 'Lakukan yang Terbaik dan Persiapkan yang Terburuk !'. Dengan melakukan yang terbaik, kita akan berusaha bertanggung jawab atas apapun kewajiban kita. Kemudian mempersiapkan yang terburuk, kita akan siap dengan segala resiko yang akan kita terima di kemudian hari. Tentunya, jangan lupa selalu ikutsertakan Allah dalam segala hal. Salam senyum, semangat dan sukses ☺ Aha ! Cling Cling Cling ! Sempurna ☺

Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Tugas Akhir ini, bisa melalui email [shaffiani12@mhs.matematika.its.ac.id](mailto:shaffiani12@mhs.matematika.its.ac.id).